

## Suites et séries

Nous allons ici étudier la résolution symbolique de quelques exercices à l'aide de la TI-Nspire CAS. Vous trouverez également des informations précieuses pour le cas où vous auriez à faire des calculs utilisant des séries géométriques de raison négative. La dernière partie de ce chapitre traite les suites et séries de fonctions.

### Sommaire

1. Suites.....	2
1.1 Étude graphique.....	2
1.2 Étude numérique.....	3
1.3 Étude symbolique des limites éventuelles des suites extraites.....	4
1.4 Étude symbolique des suites extraites.....	6
2. Calcul symbolique des termes d'une suite récurrente.....	7
2.1 Calcul par récurrence.....	7
2.2 Calcul itératif des termes.....	9
3. Séries.....	9
3.1 Calculs directs de sommes finies ou infinies.....	9
3.2 Séries géométriques de raison négative.....	12
4. Suites et séries de fonctions.....	12
4.1 Un exemple de convergence uniforme.....	12
4.2 Un exemple de convergence non uniforme.....	14
4.3 Illustration graphique.....	15

# 1. Suites

Pour illustrer les possibilités de la TI-Nspire CAS dans ce domaine, nous allons étudier la suite définie par  $u_{n+1} = \frac{4 - u_n^2}{\sqrt{5}}$ , avec  $u_0 \in [0, 2]$ .

## 1.1 Étude graphique

La version 1.4 de la TI-Nspire CAS ne possède pas la représentation graphique d'une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et une valeur initiale  $u_0$  en mode "WEB".

Ceci peut cependant être réalisé assez simplement grâce à un classeur disponible sur le site [www.univers-ti-nspire.fr](http://www.univers-ti-nspire.fr).



Voir la **démo d'utilisation** (nécessite une connexion internet).

La fonction utilisée pour calculer  $u_{n+1}$  à partir de  $u_n$  doit être définie dans f1. Cela peut être fait dans l'application Calculs, ou encore dans l'application Graphiques & géométrie.

La valeur initiale  $u_0$  doit être placée dans la variable u0. Cela peut être fait dans l'application Calculs, ou de manière interactive dans Graphiques & géométrie, il suffit de déplacer le point d'abscisse u0 sur l'axe des abscisses. On peut également définir cette valeur dans le tableau (Tableur & listes) dans lequel sont faits les calculs.

L'indice du dernier point construit est défini par la variable n\_max. Par exemple, avec n\_max = 30, on obtient la construction des points représentant  $u_0$  à  $u_{30}$ . La valeur de n\_max peut être définie dans l'application Calculs, ou dans le tableau.

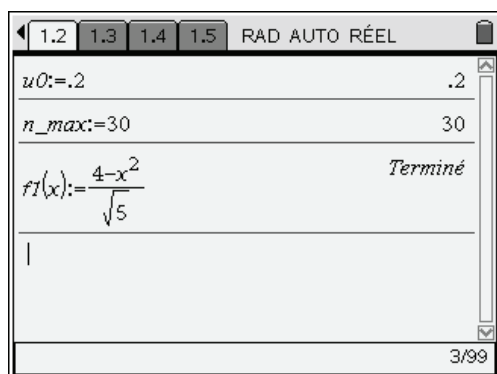
☞ Pour obtenir une construction correcte, la fonction f2 ne doit pas être modifiée. Elle doit être définie par  $f2(x) = x$ .

La représentation graphique est obtenue en construisant un nuage de points (connectés).

Les coordonnées des points de ce nuage sont calculées dans les colonnes M et N du tableau, en utilisant les fonctions définies ci-dessous.

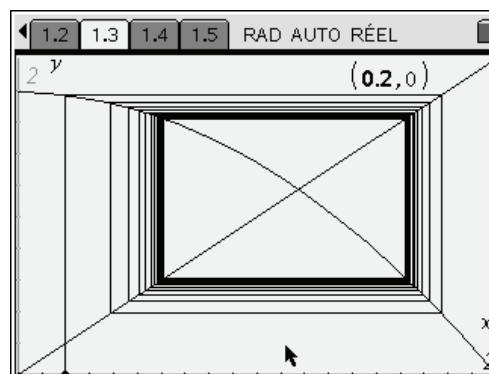
Nous nous plaçons dans le cas particulier où  $u_0$  est égal à 0,2.

On commence par définir la fonction utilisée pour calculer les termes de cette suite et les variables u0 et n\_max dans l'application Calculs.



Il est ensuite possible d'obtenir les valeurs des termes de la suite dans le tableur, et la représentation graphique dans Graphiques & géométrie.

	A	B	C	D
			$L_u$	
	$=seq(i,i,=L_{un}(approx$			
1	$u_0$	0	.2	
2	.2	1	1.77097	
3		2	.386249	
4	$n_{max}$	3	1.72214	
5	30	4	.462531	
A2	$u_0:=.2$			



On voit sur le graphique que la suite ne converge pas, mais par contre les sous-suites des termes de rang pair et des termes de rang impair semblent convergentes.

## 1.2 Étude numérique

On peut également construire une table de valeurs à l'aide de l'application Tableur & listes. On insère une nouvelle page, on choisit l'application.

Dans la première colonne du tableau on définit la suite des entiers naturels de 0 à 30 :  $=seq(i,i,0,30)$ , dans la première case de la seconde colonne, on entre  $u_0$ , dans la deuxième  $=f(b1)$  et on copie vers le bas grâce à la fonction **Saisie rapide** ( $\text{menu}$   $\{3\}$   $\{3\}$ ).

	A	B	C	D	E
	$=seq(i,i,0,30)$				
1	0	.2	$\leftarrow u_0$		
2	1	1.77097			
3	2	.386249			
4	3	1.72214			
5	4	.462531			
B1	$=u_0$				

	A	B	C	D	E
	$=seq(i,i,0,30)$				
1	0	.2	$\leftarrow u_0$		
2	1	1.77097			
3	2	.386249			
4	3	1.72214			
5	4	.462531			
B2	$=f(b1)$				

On peut aussi obtenir les valeurs de termes de la suite dans l'application Calculs :

### Version récursive :

On peut utiliser la fonction **when** pour définir la suite de façon récursive, l'écriture est très simple, mais l'efficacité limitée par le nombre d'appels récursifs. On verra de plus un autre problème au paragraphe 2, lors du calcul exact des termes d'une suite définie par récurrence.

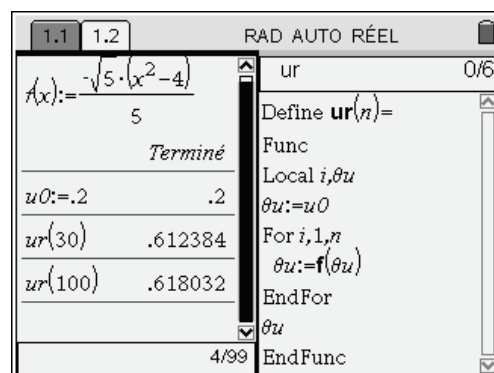
	A	B	C	D
	$f(x) := \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$			
	$u(n) := \text{when}(n=0, .2, f(u(n-1)))$			
	$u(30)$			
	.612384			
	3/99			

	A	B	C	D
	$f(x) := \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$			
	$u(n) := \text{when}(n=0, .2, f(u(n-1)))$			
	$u(30)$			
	.612384			
	4/99			

### Version itérative :

La version itérative nécessite l'écriture d'une fonction, mais est plus rapide et permet de calculer des termes d'indice plus grands.

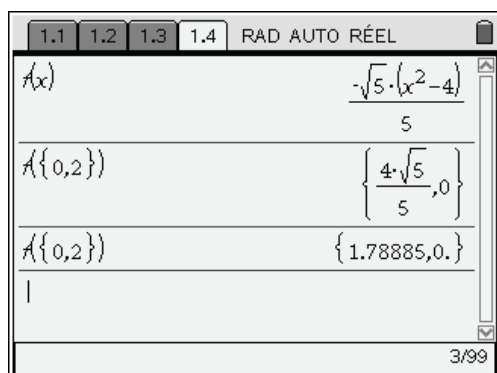
```
Define ur(n)=Func
  Local θu,i
  θu:=u0
  For i,1,n
    θu:=f(θu)
  EndFor
  θu
EndFunc
```



### 1.3 Étude symbolique des limites éventuelles des suites extraites

Cette suite est définie par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f$  continue, décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . En particulier,  $f$  est décroissante sur  $[0,2]$  et  $f([0,2]) = [f(2), f(0)] = \left[0, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right] \subset [0,2]$ .

On peut naturellement confier à la TI-Nspire CAS le soin de faire ces derniers calculs (on remarquera qu'il est possible d'obtenir directement l'image d'une liste de valeurs).



On peut en déduire que tous les termes de la suite sont dans  $[0,2]$ . La continuité de  $f$  entraîne que si la suite  $(u_n)$  converge, cela ne peut être que vers un point fixe de  $f$  contenu dans cet intervalle.

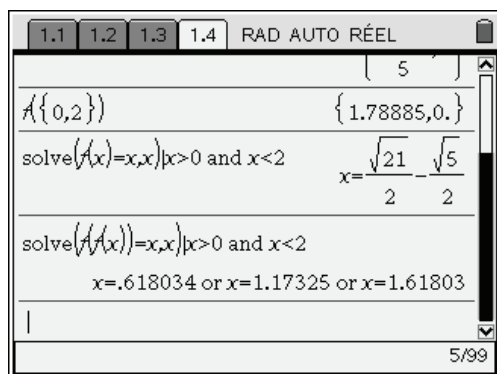
Les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont toutes les deux monotones, puisque définies à partir de  $g = f \circ f$ , fonction croissante et continue sur  $[0,2]$  :

$$v_n = u_{2n}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n))$$

$$w_n = u_{2n+1}, w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n))$$

Ces suites sont bornées (on reste dans  $[0,2]$ ), et monotones. Elles vont donc être convergentes. La continuité de  $f \circ f$  montre que la limite ne peut être que l'un des points fixes de cette fonction.

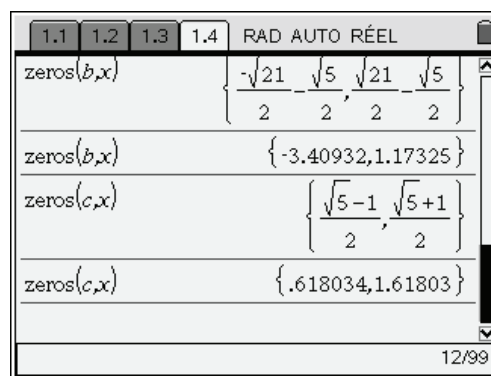
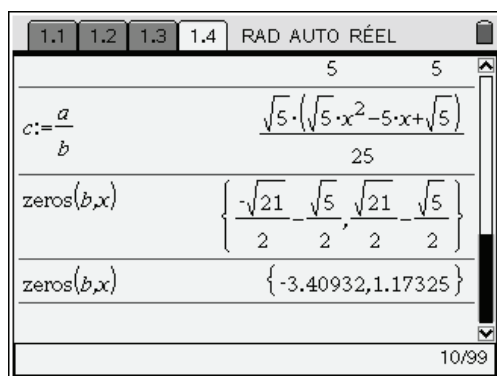
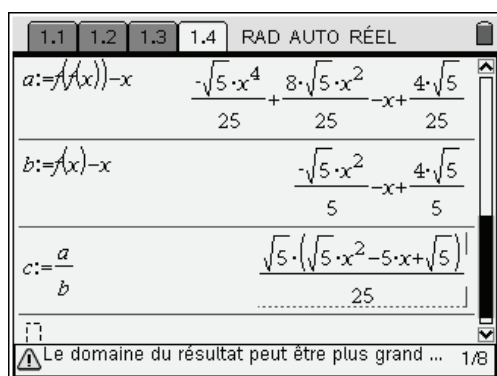
Il reste à étudier les solutions des équations  $f(x) = x$  et  $f(f(x)) = x$  dans l'intervalle  $[0,2]$  pour déterminer les limites éventuelles de  $(u_n)$ ,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .



La TI-Nspire CAS a échoué dans la résolution symbolique de l'équation  $f(f(x)) = x$ ...

Nous allons devoir lui donner un petit coup de main. Il s'agit en fait d'une équation polynomiale de degré 4, ce qui explique l'échec de la résolution, mais nous sommes ici dans un cas très favorable, puisque nous savons que les solutions de l'équation  $f(x) = x$  (équation de degré 2) sont également solutions de l'équation  $f(f(x)) = x$ .

Cela montre que le polynôme  $A(x) = f(f(x)) - x$  est divisible par  $B(x) = f(x) - x$ . Il suffit donc de calculer  $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ , puis de résoudre l'équation  $C(x) = 0$  pour obtenir les solutions de  $A(x) = 0$  (réunion des solutions de  $B(x) = 0$  et de  $C(x) = 0$ ).



En conclusion,

- les points fixes de  $f \circ f$  dans l'intervalle  $[0,2]$  sont :  $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{2}$  et  $r_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .  
(La valeur  $r_0 = -\frac{\sqrt{21}+\sqrt{5}}{2}$  n'est pas dans l'intervalle.)
- Les limites éventuelles des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont égales à  $r_1$ ,  $r_2$  ou  $r_3$ .

- La valeur  $r_2$ , seul point fixe de  $f$  dans l'intervalle  $[0, 2]$  est la seule limite possible de la suite  $(u_n)$ .

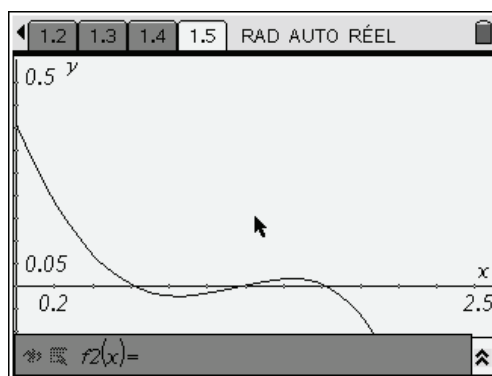
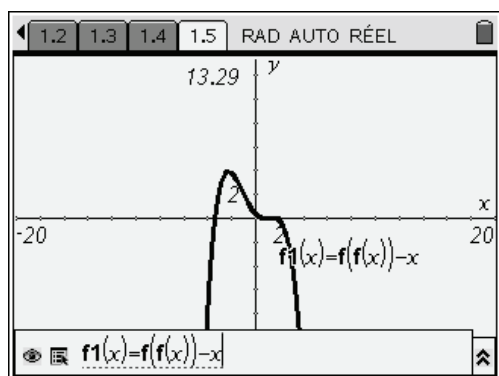
On peut également vérifier que  $f(r_1) = r_3$  et  $f(r_3) = r_1$ .

## 1.4 Étude symbolique des suites extraites

L'étude complète des suites extraites repose sur le fait que la suite est définie par une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f$  décroissante vérifiant  $f(x) = x$  en  $r_1, r_2$  et  $r_3$ .

- Les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont toutes les deux monotones, puisque définies à partir de  $g = f \circ f$ , fonction croissante comme composée de deux fonctions décroissantes.
- La décroissance de  $f$  entraîne que si  $u_{2n-1} \leq u_{2n+1}$  alors  $f(u_{2n-1}) \geq f(u_{2n+1})$ , c'est à dire  $u_{2n} \geq u_{2n+2}$ . On montre facilement que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont des sens de variation opposés.
- Si  $u_{2n+1} \rightarrow \ell$ , alors, en utilisant la continuité de  $f$ ,  $f(u_{2n+1}) \rightarrow f(\ell)$ . Donc  $(u_{2n})$  converge vers  $f(\ell)$ . On peut montrer de la même manière que si  $(u_{2n})$  converge vers  $\ell'$ , alors  $(u_{2n+1})$  converge vers  $f(\ell')$ .
- Si le premier terme  $u_1$  est dans un intervalle du type  $[a, b]$  avec  $f(f(a)) = a$  et  $f(f(b)) = b$ , la croissance de  $f \circ f$ , et donc de  $(f \circ f)^n$  permet d'obtenir :  $(f \circ f)^n(a) \leq (f \circ f)^n(u_1) \leq (f \circ f)^n(b)$ , c'est-à-dire  $a \leq u_{2n+1} \leq b$ . On reste dans  $[a, b]$ .
- Si de plus  $f(f(x)) - x$  est positif sur cet intervalle  $[a, b]$ , la suite  $(u_{2n+1})$  est croissante sur cet intervalle car  $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(f(u_{2n+1})) - u_{2n+1} \geq 0$ . Elle est décroissante si  $f(f(x)) - x$  est négatif sur  $[a, b]$ ,

Il est facile d'étudier graphiquement le signe de  $f(f(x)) - x$  sur  $[0, 2]$  :



On peut justifier ce résultat en remarquant que le polynôme du quatrième degré  $f(f(x)) - x$  se factorise sous la forme  $f(f(x)) - x = -\frac{\sqrt{5}}{25}(x - r_0)(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ .

Il est donc négatif sur  $]-\infty, r_0[$ ,  $]r_1, r_2[$  et  $]r_3, +\infty[$ , positif sur  $]r_0, r_1[$  et  $]r_2, r_3[$ .

Si l'on se limite à l'intervalle  $[0,2]$ , on a un signe positif sur  $I_1 = ]0, r_1[$  et  $I_3 = ]r_2, r_3[$ , négatif sur  $I_2 = ]r_1, r_2[$  et  $I_4 = ]r_3, 2[$ .

En utilisant les idées précédentes, il est alors facile de préciser le sens de variation des suites extraites, et de montrer que la suite ne converge pas, sauf dans le cas particulier où  $u_1 = r_1$ .

- Si  $u_1 \in ]0, r_1[$ , tous les termes de la suite  $(u_{2n+1})$  sont dans  $[0, r_1]$ . Cette suite est donc croissante ( $f \circ f(x) - x \geq 0$ ), majorée par  $r_1$ . La suite converge, et sa limite comprise entre 0 et  $r_1$ , et ne peut être égale qu'à  $r_1$ ,  $r_2$  ou  $r_3$ . Cette limite est donc égale à  $r_1$ . Dans ce cas, la suite  $(u_{2n})$  est décroissante, et converge vers  $r_3 = f(r_1)$ .
- Si  $u_1 = r_1$ , on a  $u_2 = f(r_1) = r_3$ , puis  $u_3 = f(r_3) = r_1$ , etc.
- Si  $u_1 \in ]r_1, r_2[$ , tous les termes de la suite  $(u_{2n+1})$  sont dans  $[r_1, r_2]$ . Cette suite est donc décroissante ( $f \circ f(x) - x \leq 0$ ), minorée par  $r_1$ , et la limite est comprise entre  $r_1$  et  $u_1 < r_2$ , et ne peut être égale qu'à  $r_1$ ,  $r_2$  ou  $r_3$ . Cette limite est donc égale à  $r_1$ . Dans ce cas, la suite  $(u_{2n})$  est croissante, et converge vers  $r_3 = f(r_1)$ .
- Si  $u_1 = r_2$ , on a  $u_2 = f(r_2) = r_2$ , etc. La suite  $(u_n)$  est stationnaire.
- Si  $u_1 \in ]r_2, r_3[$ , tous les termes de la suite  $(u_{2n+1})$  sont dans  $[r_2, r_3]$ . Cette suite est donc croissante ( $f \circ f(x) - x \geq 0$ ), majorée par  $r_3$ , et la limite est comprise entre  $u_1 > r_2$  et  $r_3$ , et ne peut être égale qu'à  $r_1$ ,  $r_2$  ou  $r_3$ . Cette limite est donc égale à  $r_3$ . Dans ce cas, la suite  $(u_{2n})$  est décroissante, et converge vers  $r_1 = f(r_3)$ .
- Si  $u_1 = r_3$ , on a  $u_2 = f(r_3) = r_1$ , puis  $u_3 = f(r_1) = r_3$ , etc.
- Si  $u_1 \in ]r_3, 2[$ , tous les termes de la suite  $(u_{2n+1})$  sont dans  $[r_3, 2]$ . Cette suite est donc décroissante ( $f \circ f(x) - x \leq 0$ ), minorée par  $r_3$ , et la limite ne peut être égale qu'à  $r_1$ ,  $r_2$  ou  $r_3$ . Cette limite est donc égale à  $r_3$ . Dans ce cas, la suite  $u_{2n}$  est croissante, et converge vers  $r_1 = f(r_3)$ .

## 2. Calcul symbolique des termes d'une suite récurrente

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas calculé les valeurs exactes des termes de la suite. Cela peut cependant être utile dans certains cas.

### 2.1 Calcul par récurrence

L'utilisation de la fonction **when** permet un calcul par récurrence.

Pour définir une suite de premier terme  $u_{n_0}$ , et vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on peut utiliser l'instruction :

```
u(n):=when(n=n0,un0,f(u(n-1)))
```

Il suffit d'indiquer la définition de **f** et la valeur de **n0** et **un0** pour que la machine puisse faire les calculs nécessaires.

Voici le calcul de termes de la suite étudiée dans le paragraphe précédent.

The screenshots show the following content:

- Screen 1:** Definition of  $u(n) := \text{when}(n=0, u_0, f(u(n-1)))$  with  $u_0 = \frac{2}{5}$  and  $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$ . The status bar shows 1/4.
- Screen 2:** Calculation of  $u(1) = \frac{2}{5}$ ,  $u(2) = \frac{96 \cdot \sqrt{5}}{125}$ , and  $u(3) = \frac{3284 \cdot \sqrt{5}}{15625}$ . The status bar shows 7/99.
- Screen 3:** Calculation of  $u(10)$  and  $u(30)$ . The status bar shows 9/99.
- Screen 4:** An error message 'Erreur: Dépassement des ressources' (Error: Resource limit exceeded) is displayed over the calculation of  $u(50)$ . The status bar shows 10/99.

Le calcul d'un terme par cette méthode peut donc parfois être relativement compliqué, et même tout simplement impossible comme on peut le voir dans l'écran ci-dessus lors de la tentative de calcul de  $u_{50}$ . Le précédent calcul de  $u_{30}$  passe directement en valeur approchée.

Il est important de comprendre que si un calcul de type récursif est très simple à programmer, il peut cependant entraîner de gros calculs, d'autant que les résultats intermédiaires seront recalculés plusieurs fois si l'expression est mal formulée...

Prenons la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$ .

Si l'on utilise l'instruction

**$u(n) := \text{when}(n=0, 1, (u(n-1)+1)/(u(n-1)+2))$**

le calcul du terme  $u_n$  va entraîner deux fois le calcul du terme  $u_{n-1}$ . Ainsi le simple calcul de  $u_{11}$  entraînera 2 calculs de  $u_{10}$ , 4 calculs de  $u_9$ , 8 calculs de  $u_8$ ,  $2^{10} = 1\,024$  calculs de  $u_1$  ... si la machine n'abandonne pas avant !

Il suffit d'entrer la définition de la suite en deux temps, sous la forme :

**$f(x) := (x+1)/(x+2)$**

**$u(n) := \text{when}(n=0, 1, f(u(n-1)))$**

pour faire disparaître ce problème : lors du calcul de  $u_n$ , on ne calcule plus qu'une seule fois  $u_{n-1}$ , puis la valeur obtenue est utilisée par la fonction  $f$  pour déterminer  $u_n$ .

Une autre solution aurait été de remarquer que  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n + 2}$ , et donc d'écrire

**$u(n) := \text{when}(n=0, 1, 1 - 1/(u(n-1)+2))$**





$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n p^k \binom{n}{k} = (p+1)^n$$

Il est donc inutile de perdre du temps à recopier ce type de formules dans un fichier texte de votre calculatrice... Celle-ci permet aussi le calcul de nombreuses sommes infinies.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \right) = e - 1$$

On peut aussi utiliser la fonction **gospersum** que vous trouverez dans la bibliothèque de programmes **poly** disponible sur le site [www.univers-ti-nspire.fr](http://www.univers-ti-nspire.fr). Elle permet d'obtenir des résultats dans certains cas où la fonction **sum** échoue.

$$\text{poly/gospersum}\left(\frac{k-1}{k(k+2)(k-2)}, k, 3, n\right) = \frac{13}{32} - \frac{4n^3 + 4n^2 - 4n - 1}{4n(n-1)(n+1)(n+2)}$$

$$\text{poly/gospersum}\left(\frac{k-1}{k(k+2)(k-2)}, k, 3, \infty\right) = \frac{13}{32}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left( \frac{k-1}{k(k+2)(k-2)} \right) = \frac{13}{32}$$

En ce qui concerne les séries géométriques, il vaut mieux connaître les possibilités exactes de la calculatrice. Le calcul ne pose aucun problème lorsque la raison est comprise entre 0 et 1.

Cela reste vrai dans le cas d'une raison dont on ne précise pas la valeur, mais il faut alors indiquer la condition sur cette raison :

Calculator interface showing the sum formula  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( 5 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^n \right)$  with the result  $\frac{15}{2}$ . Below it, the general formula  $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$  is shown twice.

Calculator interface showing the sum formula  $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$  with the result  $\frac{-a}{p-1}$ . Below it, the general formula  $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$  is shown with the condition  $p > 0$  and  $p < 1$ .

☞ Dans l'écran ci-dessus, on a écrit  $p > 0$  and  $p < 1$ , on pouvait aussi utiliser  $0 < p < 1$ .

C'est la méthode à utiliser pour retrouver les formules au programme de classes préparatoires sur les sommes des  $n x^n$  et  $n^2 x^n$  :

Calculator interface showing the sum formula  $\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x^n)$  with the result  $\frac{x}{(x-1)^2}$ . Below it, the sum formula  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \cdot x^n)$  is shown with the result  $\frac{x \cdot (x+1)}{(x-1)^3}$ .

En revanche, on n'obtient pas de résultat directement si l'on indique seulement que  $p$  est compris entre  $-1$  et  $1$ .

Calculator interface showing the sum formula  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \cdot x^n)$  with the result  $\frac{x \cdot (x+1)}{(x-1)^3}$ . Below it, the general formula  $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$  is shown with the condition  $p > -1$  and  $p < 1$ .

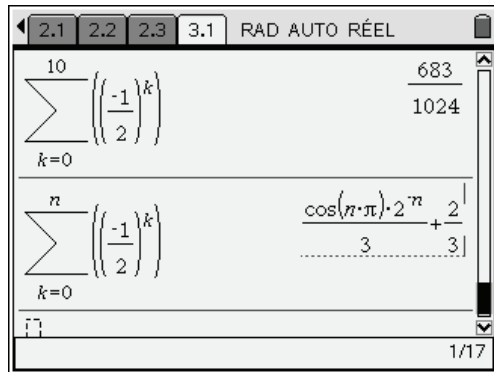
Calculator interface showing the sum formula  $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$  with the result  $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(n \cdot \pi) \cdot (-p)^n)$ .

C'est également vrai, même pour une somme finie avec  $p$  fixé numériquement. Nous allons voir comment procéder dans ce cas dans la section suivante.

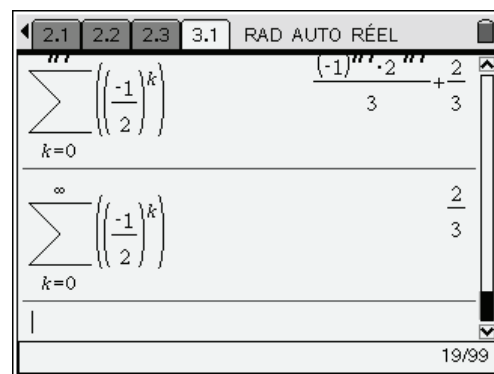
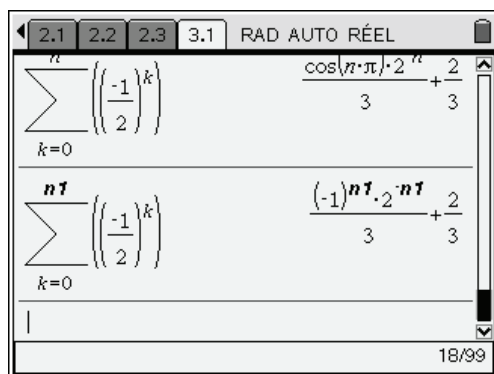
### 3.2 Séries géométriques de raison négative

Calculons la somme  $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ .

Le calcul avec  $n$  fixé est possible, mais le calcul avec  $n$  symbolique donne un résultat peu satisfaisant :



Lors de l'affichage de l'expression obtenue, la TI-Nspire CAS ne tient pas compte du fait que  $n$  désigne un entier. Pour obtenir un résultat plus simplifié, on peut remplacer  $n$  par **n1**. L'utilisation d'une variable du type **n1**, **n2**... est un moyen d'indiquer à la machine qu'elle travaille sur des entiers et elle n'a aucun problème pour trouver la somme de la série :



## 4. Suites et séries de fonctions

La fin de ce chapitre s'adresse aux étudiants connaissant les notions de convergence simple, uniforme et normale. Nous allons voir ici comment traiter un exercice de concours sur ce sujet en utilisant la TI-Nspire CAS.

### 4.1 Un exemple de convergence uniforme

On considère la suite de fonctions définie pour  $n \geq 1$  par  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$ .

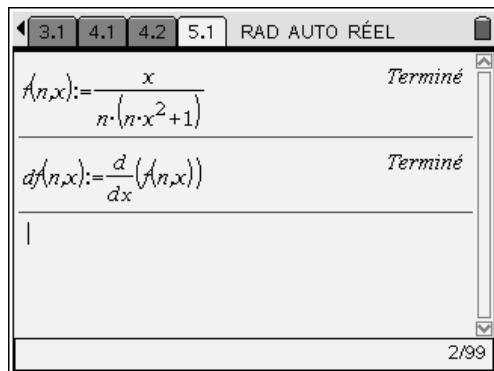
On demande d'étudier la convergence de  $(f_n)$  et de  $\sum f_n$ .

- Étude de la convergence simple

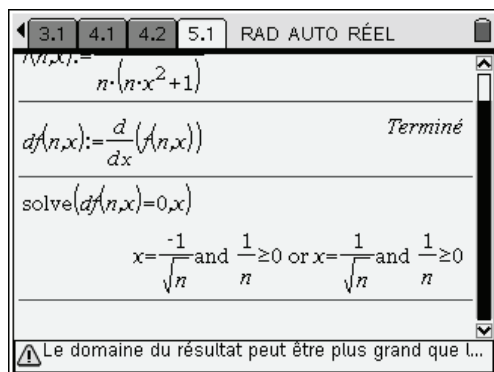
Elle ne pose aucun problème. Pour  $x=0$ ,  $f_n(x)=0$ ,  $(f_n(0))$  converge vers 0. Pour  $x$  non nul,  $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$ , et il y a également convergence vers 0.

- Étude de la convergence uniforme

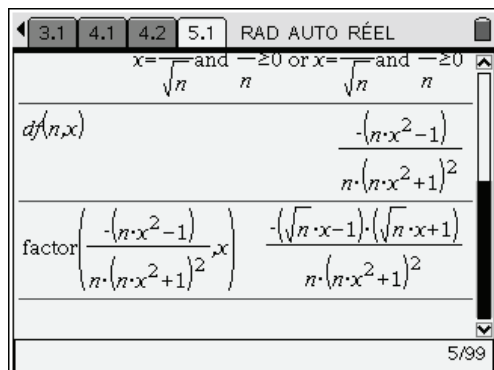
On commence par définir les fonctions et leurs dérivées :



On peut ensuite rechercher les valeurs annulant  $f'_n(x)$  :



Pour étudier les variations, il faut étudier le signe de la dérivée, et donc connaître l'expression de cette dernière :



Calculons également les valeurs de  $f_n$  en  $\frac{-1}{\sqrt{n}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  (on pourrait se contenter d'un calcul,  $f_n$  est impaire).

Il est également facile de vérifier la valeur des limites à l'infini :

Left screenshot:  $f\left(n, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(n, x) = 0$ .  
 Right screenshot:  $f\left(n, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right)$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(n, x) = 0$ .

On dispose de tous les éléments pour construire le tableau de variations.

$x$	$\frac{-1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
$f'_n(x)$	+	-
$f_n(x)$	0 $\nearrow$	$m \searrow$
	$-m$	$0$

La norme infinie de  $f_n$  est donc égale à  $m = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ , ce qui prouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$ .

On peut également en déduire la convergence normale de  $\sum f_n$  puisque  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ , avec

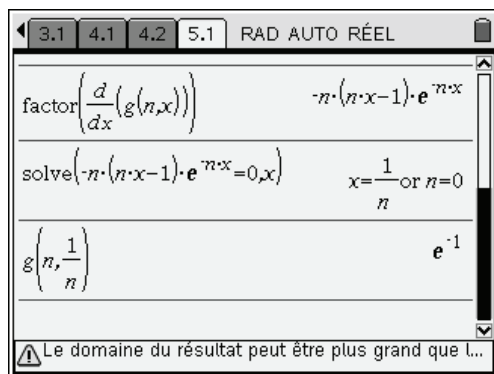
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  convergente : c'est une série de Riemann, et l'on a  $n\sqrt{n} = n^\alpha$  avec  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ .

## 4.2 Un exemple de convergence non uniforme

Étudions à présent la suite de fonctions définie sur  $I = [0, +\infty[$  par  $g_n(x) = nx e^{-nx}$ . Pour  $x = 0$ , la suite  $(g_n(x))$  est constamment nulle. Pour  $x > 0$ , elle converge vers 0. Il y a donc convergence simple de cette suite vers 0. On peut le vérifier à condition toutefois de ne pas oublier la condition  $x > 0$ .

Left screenshot:  $g(n, x) := nx \cdot e^{-nx}$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n, x) = 0$ .

On peut ensuite facilement étudier les variations en calculant la dérivée :



L'étude des variations permet de montrer que les valeurs sont comprises entre 0 et  $\frac{1}{e}$ .

La norme infinie de la fonction est  $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{e}$ , et la suite de fonctions n'est pas uniformément convergente sur  $I = [0, +\infty[$ .

### 4.3 Illustration graphique

On peut visualiser la différence de comportement entre les deux suites étudiées. Nous allons directement construire les courbes représentatives de  $f_1, f_2, \dots, f_5$ , puis de  $g_1, g_2, \dots, g_5$ .

Il suffit pour cela de créer une nouvelle page avec l'application Graphiques & géométrie.

Une idée naturelle serait de définir cinq fonctions à construire :

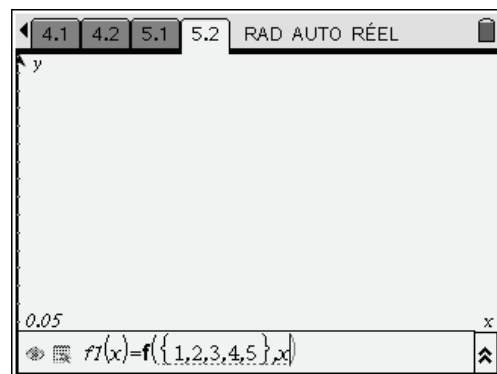
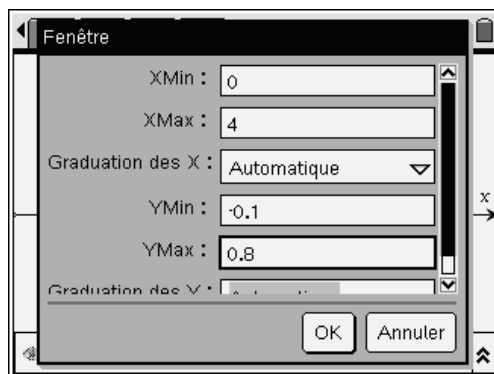
- **f1(x)** par **f(1,x)**
- **f2(x)** par **f(2,x)**
- **f3(x)** par **f(3,x)**
- **f4(x)** par **f(4,x)**
- **f5(x)** par **f(5,x)**

Mais il suffit en fait de définir

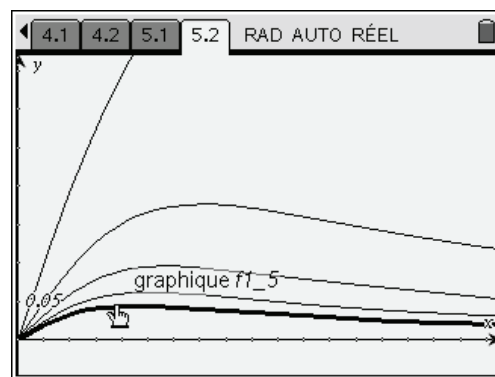
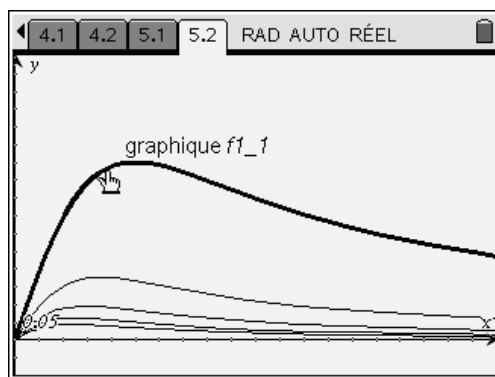
- **f1(x)** par **f({1,2,3,4,5},x)**

pour construire automatiquement les cinq courbes représentatives correspondant aux cinq valeurs de  $n$  données dans la liste.

Les constructions sont faites sur l'intervalle  $[0, 4]$  :

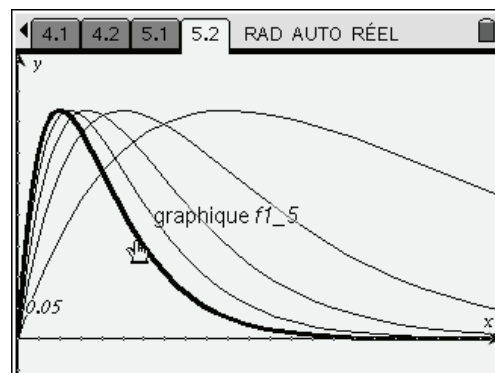
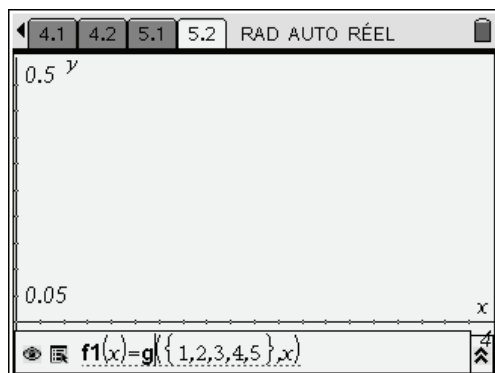


Voici ce que l'on obtient pour  $f_n$  :



☞ L'affichage indique le nom de la fonction, suivi du numéro d'ordre de la courbe dans la liste.

Puis pour  $g_n$  :



La différence de comportement est bien visible ici. Dans le premier cas, il y a convergence uniforme, alors que dans le second, on observe un phénomène typique de “bosse glissante”.

## Exercices

### 1 Point attractif, point répulsif

Dans le premier exemple de ce chapitre (suite récurrente, page 6), nous avons montré que la suite ne converge pas, sauf si elle est stationnaire.

Retrouver directement ce résultat, sans étudier les suites extraites.

### 2 Calcul des termes d'une suite récurrente double

Terme d'ordre  $n$  de la suite de Fibonacci :  $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

### 3 Calcul de la somme d'une série

Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!}$ .

N.B. La TI-Nspire permet d'obtenir directement le résultat, mais on vous demande de conduire les calculs comme vous le feriez sans calculatrice dans un exercice de ce type.



#### 4 Convergence d'une série

Déterminer les polynômes  $P$  à coefficients réels tels que la série de terme général  $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$  soit convergente.

#### 5 Un exercice d'oral

Résoudre l'équation  $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$ .

#### 6 Convergence normale d'une série de fonctions

Étudier la convergence simple et la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} n x^\alpha e^{-n x^2}$  pour  $x > 0$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ .  
Calculer la somme de cette série.

### Solutions des exercices

#### 1 Point attractif, point répulsif

Il est possible de prévoir la non-convergence de la suite en étudiant la nature du point fixe de  $f$ . On doit pour cela étudier la valeur absolue de la dérivée de la fonction pour ce point fixe. Le point est un point attractif si cette valeur absolue est inférieure à 1, et répulsif si elle est supérieure à 1.

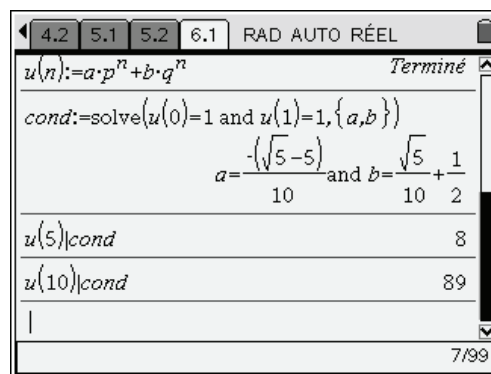
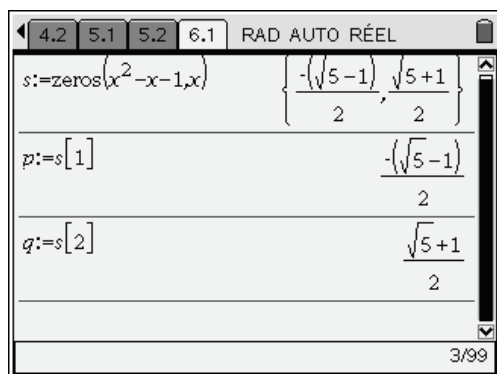
Calculator screen showing the analysis of a fixed point for the function  $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$ . The screen displays the function definition, the solution for the fixed point  $x = \frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{2}$ , and the derivative at that point, which is  $1 - \frac{\sqrt{105}}{5}$ . The status bar at the bottom shows '3/99'.

La valeur absolue de la dérivée est strictement supérieure à 1. L'unique point fixe est donc un point répulsif. La suite ne converge pas, sauf si elle est stationnaire.

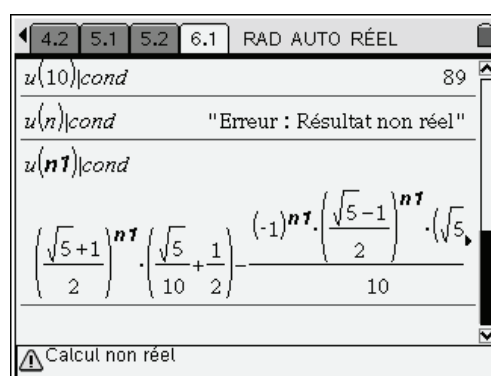
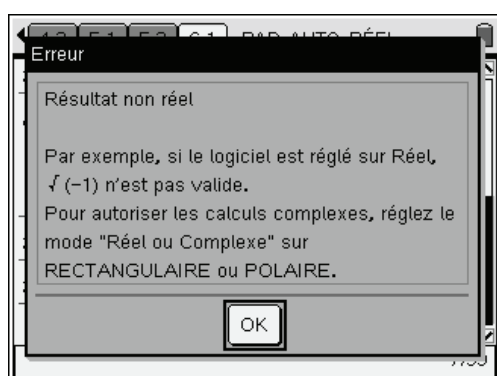
#### 2 Calcul des termes d'une suite récurrente double

On sait que  $u_n = a p^n + b q^n$ , avec  $p$  et  $q$  solutions de  $x^2 - x - 1 = 0$ , et  $a$  et  $b$  déterminés par les conditions initiales  $u_0 = a + b = 1$  et  $u_1 = ap + bq = 1$ . Il est possible de conduire tous les calculs nécessaires à la calculatrice.

```
s:=zeros(x^2-x-1,x)
p:=s[1]
q:=s[2]
u(n):=a*p^n+b*q^n
cond:=solve(u(0)=1 and u(1)=1,{a,b})
u(5)|cond...
```

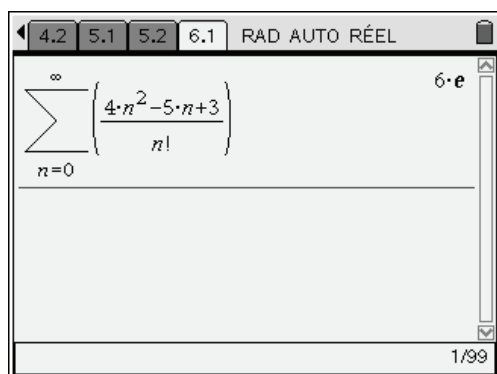


Nous avons calculé sans problème certaines valeurs de  $u_n$ . Attention par contre au calcul de  $u_n$  avec  $n$  quelconque. En mode réel, on retrouve les problèmes liés à l'évaluation de la puissance d'un nombre négatif, alors que la calculatrice ne sait pas que  $n$  est un entier.



### 3 Calcul de la somme d'une série

La TI-Nspire CAS sait calculer directement la somme de cette série.



Nous allons effectuer en utilisant l'aide de la TI-Nspire CAS les calculs tels qu'ils seraient fait à la main. Dans cet exercice, une idée assez classique est de rechercher  $a, b, c$  tels que :

$$4n^2 - 5n + 3 = a \cdot n(n-1) + b \cdot n + c$$

On écrit ensuite que :

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)}{n!} + b \sum_{n=0}^N \frac{n-1}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)}{n!} + b \sum_{n=1}^N \frac{n-1}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + b \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + b \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

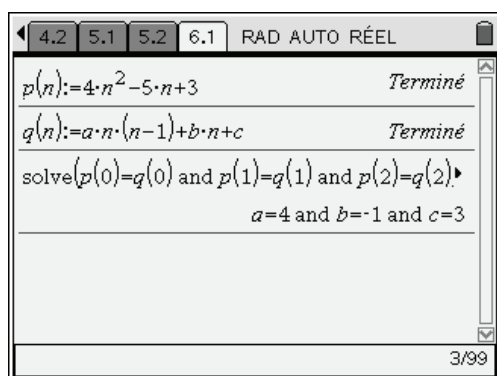
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = (a + b + c) \cdot e$$

Il reste donc à déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que le polynôme  $p(n) = 4n^2 - 5n + 3$  soit égal au polynôme  $q(n) = an(n-1) + bn + c$ . Il y a plusieurs façons de le faire avec la TI-Nspire CAS. Ici, nous allons utiliser le fait qu'il doit y avoir égalité entre  $p(n)$  et  $q(n)$  pour  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$ .

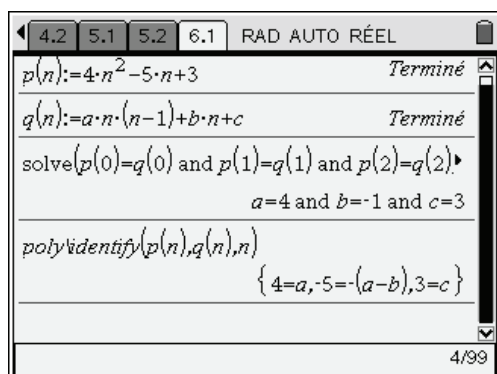
**p(n):=4n^2-5n+3**

**q(n):=a\*n\*(n-1)+b\*n+c**

**solve(p(0)=q(0) and p(1)=q(1) and p(2)=q(2),{a,b,c})**



On pouvait aussi utiliser la fonction **identity** de la bibliothèque **poly**.

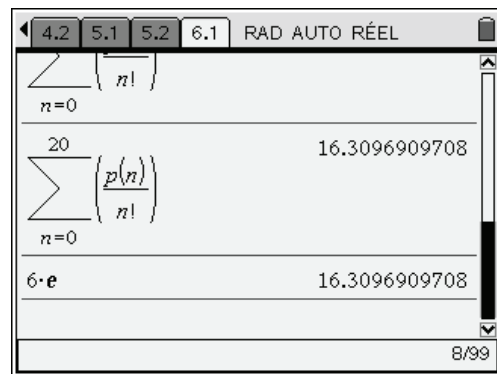
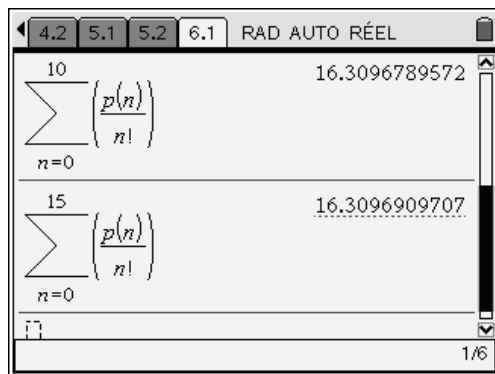


On doit donc avoir  $a = 4$ ,  $a - b = 5$  et  $c = 3$ .

D'où  $a = 4$ ,  $c = 3$ , puis  $b = a - 5 = 4 - 5 = -1$ .

On obtient donc  $S = (4 - 1 + 3) \cdot e = 6e$ . Ce qui est bien le résultat trouvé directement.

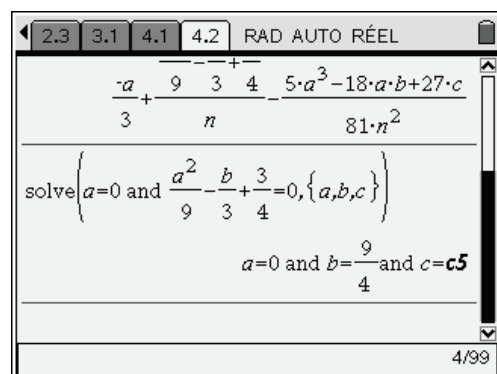
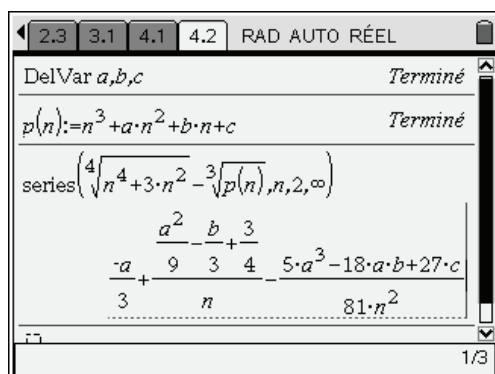
On peut le vérifier à l'aide de la TI-Nspire CAS en demandant le calcul approché (valider par **ctrl** **enter**) de ce nombre, et en le comparant par exemple au calcul approché de la somme des 20 premiers termes de la série. Comme on peut le voir, la convergence de cette série est très rapide.



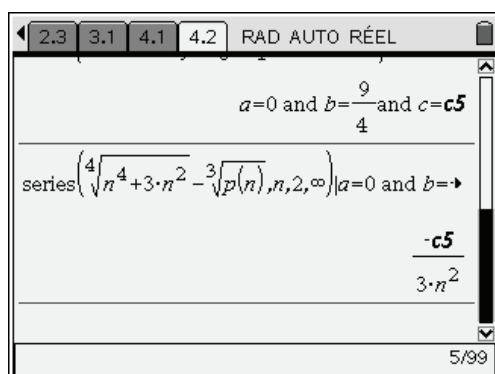
#### 4 Convergence d'une série

Au voisinage de l'infini  $\sqrt[4]{n^4 + 3n^2} \sim n$ , une condition **nécessaire** pour que la série de terme général  $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$  converge est que  $u_n$  tende vers 0 à l'infini, ce qui impose  $\sqrt[3]{P(n)} \sim n$  et donc que  $P$  soit de la forme :  $P(n) = n^3 + a n^2 + b n + c$ .

Pour déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , pour lesquels la série de terme général  $u_n$  converge, il suffit de faire un développement asymptotique de  $u_n$ .



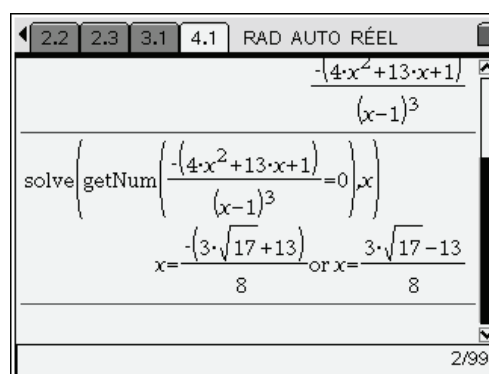
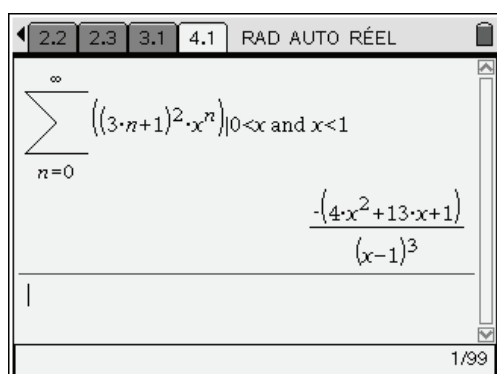
Le terme constant, ainsi que le terme en  $\frac{1}{n}$  doivent être nuls, ce qui donne les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  obtenues dans l'écran de droite ci-dessus ( $c$  est un réel quelconque). Ces conditions étant remplies, le calcul ci-dessous montre que  $u_n = O(1/n^2)$  et donc que la série converge.



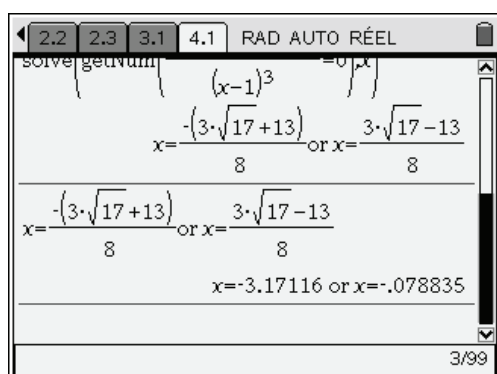
On a donc  $P(n) = n^3 + \frac{9}{4}n + c$ , ( $c \in \mathbb{R}$ ).

## 5 Un exercice d'oral

Comme on l'a vu au paragraphe 3, la TI-Nspire CAS calcule la somme de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n$ , à condition de lui préciser que  $x \in ]0, 1[$ . Le rayon de convergence de cette série est 1, comme on peut le voir en calculant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+4)^2}{(3n+1)^2} = 1$ .



La somme de la série et la fraction rationnelle trouvée dans l'écran de gauche ci-dessus coïncident sur  $]0, 1[$  et donc pour des raisons de continuité sur tout l'intervalle de convergence de la série  $] -1, 1[$ . On est donc amené à résoudre l'équation  $4x^2 + 13x + 1 = 0$ , ce qui est fait dans l'écran de droite ci-dessus. On trouve deux racines dont seulement la seconde appartient à  $] -1, 1[$  (le résultat final de l'écran ci-dessous s'obtient en validant par  $\text{ctrl} \text{ } \text{enter}$ ).



La solution est donc :  $x = \frac{3\sqrt{17} - 13}{8}$

## 6 Convergence normale d'une série de fonctions

La convergence de la série ne pose pas de problème. Les termes sont tous strictement positifs, et on peut par exemple utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{n+1}{n} e^{-x^2} \rightarrow e^{-x^2} < 1.$$

Étudions à présent la convergence uniforme. On peut commencer par définir le terme général de la suite, puis s'intéresser au signe de sa dérivée.

4.2 5.1 5.2 6.1 RAD AUTO RÉEL

$u(n,x) := n \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}$  Terminé

$\frac{d}{dx}(u(n,x)) \quad \left( \frac{n \cdot \alpha - 2 \cdot n^2 \cdot x}{x} \right) \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}$

2/99

4.2 5.1 5.2 6.1 RAD AUTO RÉEL

zeros  $\left( \left( \frac{n \cdot \alpha - 2 \cdot n^2 \cdot x}{x} \right) \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}, x \right)$

$\left\{ \left[ \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2}, \frac{\alpha}{n} \right], \alpha \geq 0, \left\{ \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2}, \frac{\alpha}{n} \right\}, 0, \alpha > 0 \right\}$

3/99

Si  $\alpha \leq 0$ , il n'y a pas de solutions,  $u'_n$  est négative, et la fonction est décroissante. Pour  $n$  non nul, la limite de  $u_n(x)$  en 0 est égale à  $+\infty$ . La calculatrice est en mesure de le confirmer, sous réserve qu'on pense à lui préciser que  $n > 0$ . Il ne peut donc pas y avoir de convergence normale (pas de majoration du terme général indépendante de  $x$  possible sur  $\mathbb{R}_+^*$ ).

En revanche, sur un intervalle du type  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ , on peut majorer la fonction par sa valeur en  $a$ , et il y a convergence normale puisque  $\sum_{n \geq 1} n a^\alpha e^{-na^2}$  converge.

Si  $\alpha > 0$ , la dérivée s'annule en  $x_n = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$ . La fonction est croissante sur  $]0, x_n]$ , puis décroissante. On en déduit que  $\forall x > 0, u_n(x) \leq u_n(x_n)$ .  $\|u_n\|_\infty = u_n(x_n)$ .

Laissons à la calculatrice le soin de calculer cette valeur.

4.2 5.1 5.2 6.1 RAD AUTO RÉEL

zeros  $\left( \left( \frac{n \cdot \alpha - 2 \cdot n^2 \cdot x}{x} \right) \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}, x \right) | x > 0 \text{ and } n > 0$

$\left\{ \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2 \cdot \sqrt{n}} \right\}$

4/99

4.2 5.1 5.2 6.1 RAD AUTO RÉEL

expand  $\left( u \left( n, \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2 \cdot \sqrt{n}} \right) \right)$

$\left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n}} \right)^\alpha \cdot n$

$\sqrt{e^\alpha} \cdot \sqrt{2^\alpha}$

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

En conclusion, pour  $\alpha > 0$ ,  $\|u_n\|_\infty = u_n(x_n) = \frac{A}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$ , avec  $A = \frac{(\sqrt{\alpha})^\alpha}{(\sqrt{e})^\alpha (\sqrt{2})^\alpha} = \left( \frac{\alpha}{2e} \right)^{\alpha/2}$ .

Il y a donc convergence normale si et seulement si  $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$ , c'est à dire pour  $\alpha > 4$ .

La calculatrice permet d'obtenir directement la valeur de la somme de la série, sous réserve de préciser l'intervalle de définition de  $x$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n,x) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-n \cdot x^2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n,x) | x > 0 \quad \frac{x^{\alpha}}{4 \cdot \left( \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2}$$

Pour comprendre ce dernier résultat, il suffit de voir que  $n x^{\alpha} e^{-n x^2} = x^{\alpha} \cdot n p^n$ , avec  $p = e^{-x^2}$ . On peut donc utiliser la formule de calcul de  $\sum_{n=1}^{\infty} n p^n$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot a^n) | a > 0 \text{ and } a < 1 \quad \frac{a}{(a-1)^2}$$

$$\frac{a}{(a-1)^2} | a = e^{-x^2} \quad \frac{1}{4 \cdot \left( \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2}$$

Pour parvenir au résultat affiché par la calculatrice, une petite transformation s'impose :

$$\frac{e^{-u}}{(e^{-u} - 1)^2} = \frac{e^{-u}}{\left( e^{-\frac{u}{2}} \cdot \left( e^{-\frac{u}{2}} - e^{\frac{u}{2}} \right) \right)^2} = \frac{1}{\left( e^{-\frac{u}{2}} - e^{\frac{u}{2}} \right)^2} = \frac{1}{\left( 2 \sinh \frac{u}{2} \right)^2} = \frac{1}{4 \left( \sinh \frac{u}{2} \right)^2}$$

Ceci peut se retrouver en convertissant le dernier résultat en exponentielle.

$$\frac{a}{(a-1)^2} | a = e^{-x^2} \quad \frac{1}{4 \cdot \left( \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2}$$

$$\frac{1}{4 \cdot \left( \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2} \rightarrow \exp \quad \frac{e^{-x^2}}{(e^{-x^2} - 1)^2}$$

