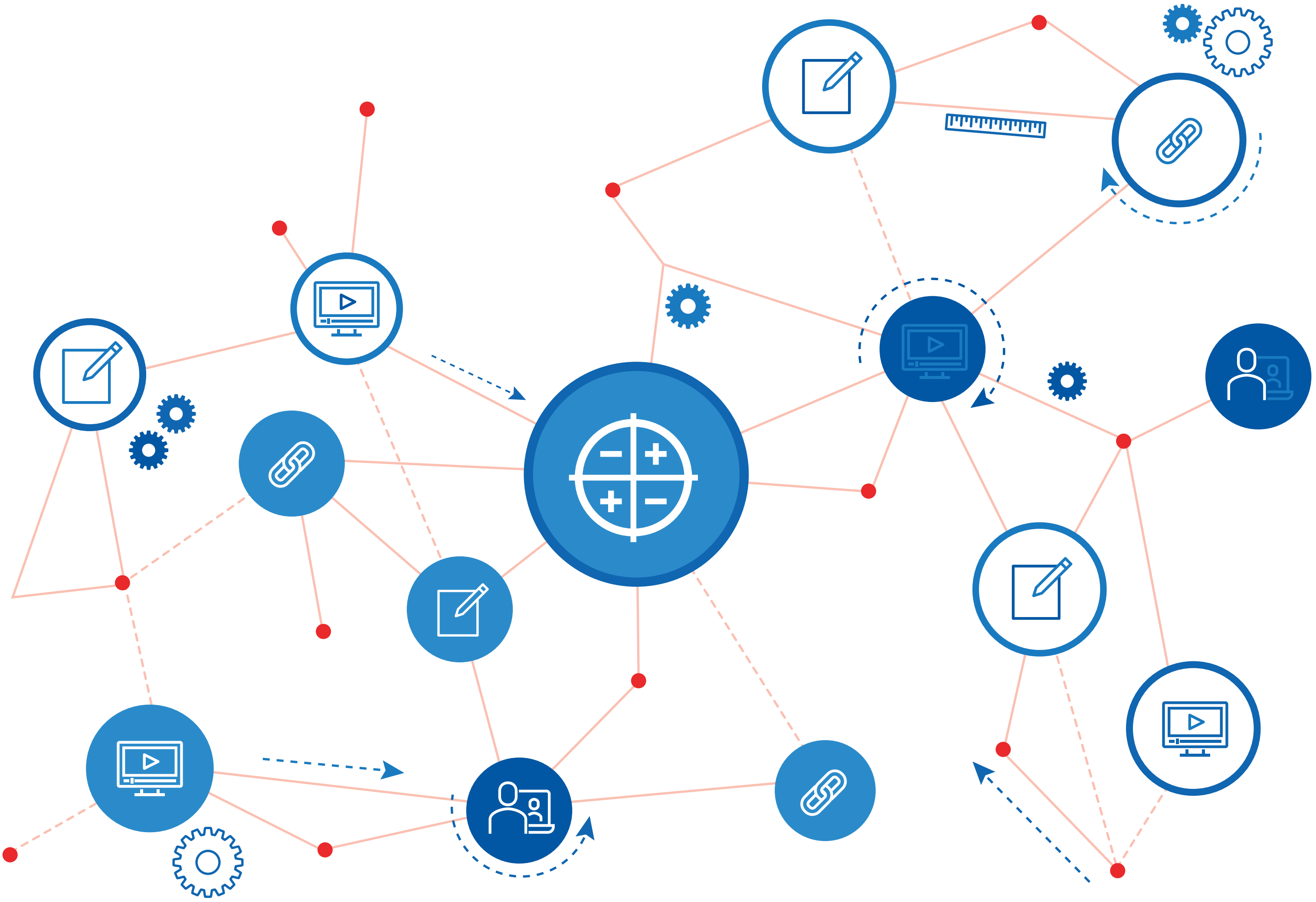
T³ FRANCE

Teachers Teaching with Technology™



Boris Hanus, Isabelle Pazé et Gérald Torres

Mathématiques
Activités avec la calculatrice graphique
Lycée technologique – Classes de T^ale^

www.t3france.fr

python™

Activités mathématiques en classe de terminale technologique

Table des matières

1. Mise à jour système. 2
2. Avant-propos 3
3. Suite arithmétique et somme 4
4. Suite géométrique et somme 6
5. Comparaison suite arithmétique et géométrique 8
6. Intérêts simples et intérêts composés 10
7. Introduction aux fonctions exponentielles 12
8. Décroissance exponentielle et logarithme décimal 14
9. Fonction exponentielle et algorithme de balayage 16
10. Niveau d'intensité sonore et repère semi-logarithmique 18
11. Taux d'évolution moyen - Racine $n^{ième}$ 20
12. Nombre de mensualités et Solveur financier 22
13. Coût unitaire et fonction inverse 24
14. Coût total, coût marginal et bénéfice 26
15. Fabrication d'une boîte à coût minimal 28
16. Méthode des moindres carrés 30
17. Ajustement non linéaire 32
18. Automatiser le calcul de somme $\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$ 34
19. Loi binomiale 36
20. Simulation d'une loi binomiale 38
21. Loi binomiale et seuil 40
22. Triangle de Pascal et loi binomiale 42
23. Utilisation du tableur 44
24. Régionnement du plan 46
25. Programmation linéaire 48
26. Méthode de Monte-Carlo 50
27. Marche aléatoire - Casino 52
28. STI2D/STL - Méthode des rectangles 54
29. STI2D/STL - Primitive, aire et volume 56
30. STI2D/STL - Equation différentielle linéaire du 1er ordre 58
31. STI2D/STL - Loi de décroissance radioactive 60
32. STI2D - Nombres Complexes, forme algébrique, trigonométrique 62

Mises à jour système et compléments logiciels

Pour réaliser les fiches proposées dans cet ouvrage, il est nécessaire de disposer d'une calculatrice Texas Instruments, permettant également de programmer en langage Python, cela bien que ce ne soit pas l'objectif premier de ce livret.

Cela concerne les modèles suivants :

- TI-82 Advanced Édition Python
- TI-83 Premium CE + Python Adapter
- TI-83 Premium CE Édition Python

Pour les deux derniers modèles, il convient que le système d'exploitation de la calculatrice soit à jour.

L'installation des mises à jour calculatrice est très facile : il suffit de télécharger un fichier à l'adresse indiquée ci-dessous puis de copier le fichier téléchargé dans la machine à l'aide du logiciel ad hoc (à savoir le logiciel TI-Connect CE prévu à cet effet).

Mise à jour des calculatrices TI-83 Premium CE	

AVANT PROPOS

Ce livret s'adresse aux enseignants de mathématiques des classes de terminale technologique : il poursuit, approfondit et complète les travaux déjà abordés dans le livret de première.

Nous vous proposons 30 fiches permettant de couvrir l'ensemble du nouveau programme officiel de terminale technologique en utilisant les calculatrices graphiques **TI-82 Advanced Edition Python** et **TI-83 Premium CE Edition Python**. Ces fiches traitent d'abord la partie « Analyse » puis la partie « Statistiques et Probabilités » puis les thèmes d'étude proposés dans le programme officiel. Enfin, certaines fiches en fin de livret concernent plus particulièrement des activités destinées à l'enseignement de spécialité des séries STI2D et STL.

Les élèves des sections technologiques rencontrent souvent des difficultés en mathématiques. Le bon usage de la calculatrice participe au fait de les rassurer et de leur permettre de mieux comprendre en visualisant les courbes des fonctions, de vérifier leurs calculs.

Connaissant les difficultés actuelles de nos élèves à se motiver pour entrer dans une activité mathématique, nous avons veillé à proposer une résolution de problèmes afin de rendre acteur l'élève, seul ou en groupe, et de mobiliser ses compétences mathématiques.
Les parties transversales « automatismes » et « algorithmique et programmation » se retrouvent ainsi dans ces fiches et permettent une maîtrise des savoir-faire ainsi qu'un ancrage solide des fondamentaux.

Nous attirons l'attention des collègues sur le fait que la calculatrice TI-82 Advanced Edition Python ne pourra pas traiter les activités faisant intervenir la bibliothèque ti_plotlib (qui gère le graphique) en langage Python : il s'agit de la méthode de Monte Carlo, de la méthode des rectangles et de la marche aléatoire.

Ces deux calculatrices effectuent toutes les tâches courantes (calculs de fraction avec écriture en deux dimensions, simplifications des racines carrées, résolutions exactes des équations du second degré et des systèmes à deux inconnues et deux équation…). On peut aussi programmer en Python sur ces deux machines avec les bibliothèques math et random indispensables pour tous les scripts utilisés en classe.

La différence entre ces deux calculatrices se situe au niveau des modules supplémentaires Python présents seulement sur la TI-83 Premium CE Edition Python. Ces modules permettent de faire des représentations graphiques en Python ainsi que de piloter une carte Micro:bit (entre autre).

D'autre part, il est d'ailleurs fortement recommandé de **mettre à jour** le logiciel interne des calculatrices afin de disposer des ajouts et des correctifs les plus récents.

Pour plus d'information sur ces produits, vous pouvez consulter https://education.ti.com/fr section « calculatrices lycée et supérieur ».

Nous vous souhaitons de prendre du plaisir à découvrir ces activités et à les faire vivre dans vos classes avec les élèves.

Les auteurs.

Suite arithmétique et somme.

Enoncé

Scipione cuisine des pizzas « al trancio » qui ont beaucoup de succès ! A l'ouverture en septembre 2021, il vendit 479 pizzas.

La demande étant toujours supérieure à l'offre, Scipione décide de fabriquer 65 pizzas de plus tous les mois.

On note u_0 le nombre de pizzas fabriquées en septembre 2021, u_1 le nombre de pizzas fabriquées en octobre 2021, et u_n le nombre de pizzas fabriquées n mois après septembre 2021.

1. Calculer u_1 et u_2. Que représentent ces nombres ?

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner sa raison.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Selon ce modèle, combien Scipione va-t-il fabriquer de pizzas en janvier 2023 ? En décembre 2023 ?

5. Calculer le nombre total de pizzas fabriquées l'année 2023.

6. A partir de 1350 pizzas par mois, Scipione est obligé d'embaucher une autre personne. Afficher le tableau de valeurs de la suite pour déterminer à partir de quel mois Scipione va-t-il prendre un nouvel employé ?

Crédit photo : www.pexels.com – Anna Shvets

1. Calcul de u_1 et u_2

Chaque mois le nombre de pizzas augmente de 65. Etant donné que $u_0 = 479$ alors $u_1 = u_0 + 65 = 479 + 65 = 544$.

De même $u_2 = u_1 + 65 = 544 + 65 = 609$.

Scipione a donc fabriqué $u_1 = 544$ pizzas en octobre 2021 et il a fabriqué $u_2 = 609$ pizzas au mois de novembre 2021.

2. Nature de la suite

Pour passer d'un terme de la suite au suivant on ajoute 65.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 65$ ce qui prouve que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 65$ et de premier terme $u_0 = 479$.

3. Expression explicite de u_n

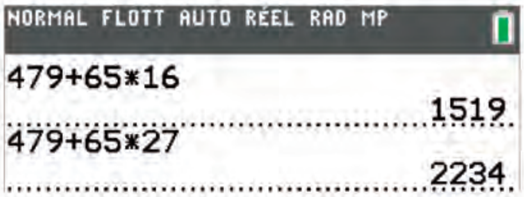
D'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = 479 + 65n$.

Suite arithmétique et somme.

4. Prévision

En janvier 2023 on a $n = 16$ et $u_{16} = 479 + 65 \times 16 = 1519$.

En décembre 2023 on a $n = 27$ et $u_{27} = 479 + 65 \times 27 = 2234$.

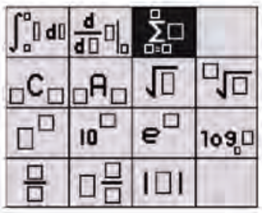


5. Calcul de somme

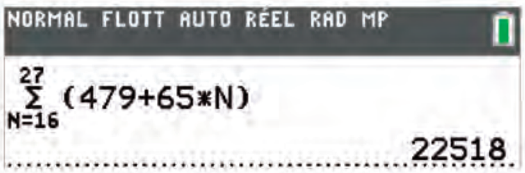
Le nombre total de pizzas fabriquées en 2023 est :

$u_{16} + u_{13} + \cdots + u_{27} = \frac{u_{16}+u_{27}}{2} \times 12 = 22518.$

On le vérifie avec notre calculatrice et le symbole Σ accessible dans 2nde $\frac{\square}{\square}$



$$\sum_{n=16}^{27} u_n = \sum_{n=16}^{27} (479 + 65n) = 22518$$



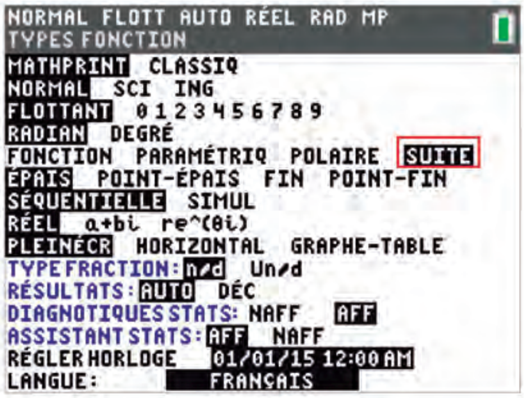
6. Scipione embauche

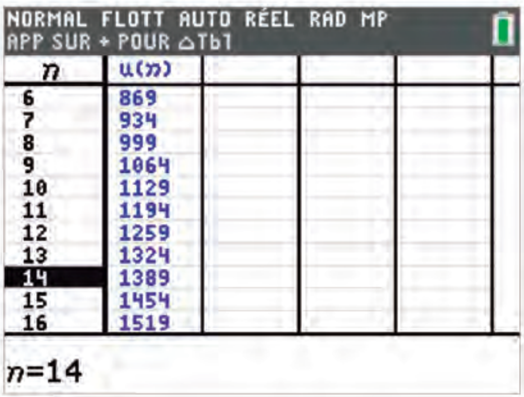
Pour afficher le tableau de valeurs de la suite, on sélectionne le mode SUITE.

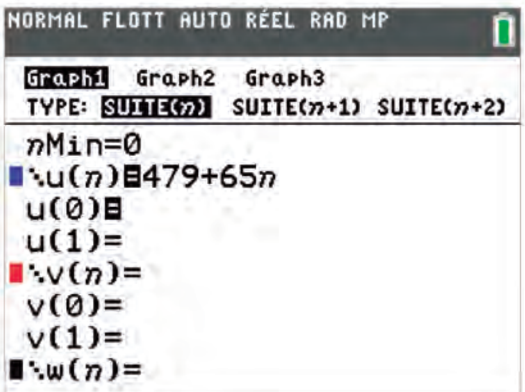
Pour entrer l'expression de la suite on appuie sur f(x) puis on sélectionne SUITE(n) pour définir une suite de façon explicite.

On obtient le tableau de valeurs en appuyant sur 2nde graphe.

On constate que Scipione va embaucher à partir du mois $n = 14$ ce qui correspond à novembre 2022.







Suite géométrique et somme

Enoncé


Crédit photo : www.pexels.com – Mart Production

On étudie le nombre de nouveaux abonnements à internet en très haut débit dans un pays chaque trimestre. A partir du 4ème trimestre de l'année 2016 le nombre de nouveaux abonnements augmente de 4% à chaque trimestre.

On note u_n le nombre, en millions, de nouveaux abonnements à internet en très haut débit en France au bout de n trimestres. On donne $u_0 = 0{,}41$.

1. Vérifier en détaillant le calcul que $u_1 = 0{,}6765$. Que représente ce nombre ?

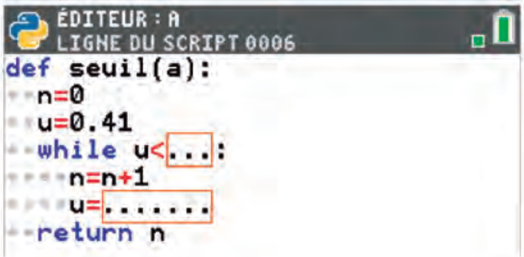
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner sa raison. Calculer $u_2$et u_3.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Selon ce modèle, combien de nouveaux abonnements y aura-t-il au 1er trimestre 2019 ? Au 4ème trimestre 2022 ?

5. Calculer le nombre de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 (année entière).

6. On cherche à déterminer à partir de quelle valeur de n, le nombre de nouveaux abonnés u_n dépassera 2 millions. Compléter la fonction Python **seuil** qui permet de renvoyer cette valeur de n.

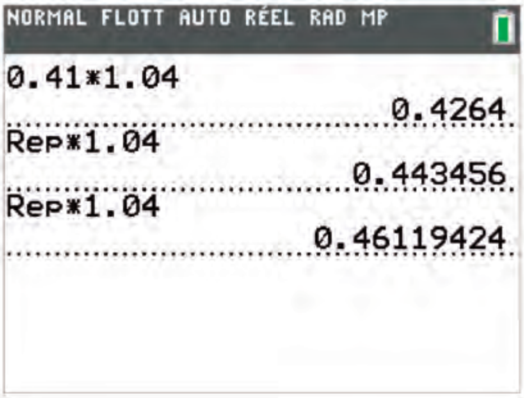


1. Calcul de u_1

Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%. Le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est 1,04.

Donc $u_1 = u_0 \times 1{,}04 = 0{,}4264$. Ce qui représente 426400 nouveaux abonnements au 1er trimestre 2017.

2. Nature de la suite



Chaque trimestre, le nombre de nouveaux abonnés augmente de 4%, ainsi pour passer d'un terme au suivant de la suite on multiplie par 1,04 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 1{,}04u_n$ ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et de premier terme $u_0 = 0{,}41$.

Etant donné que nous venons de calculer u_1, en écrivant **`*1.04`** la calculatrice va effectuer le calcul **`Rep*1.04`**. **`Rep`** signifie réponse précédente soit u_1, on a donc bien multiplié u_1 par 1,04 ce qui nous donne u_2 et en appuyant juste sur [entrer], la calculatrice reproduit ce même calcul (sauf que **`Rep`** correspond à u_2) et renvoie donc u_3.

Ainsi $u_2 \approx 0{,}443$ et $u_3 \approx 0{,}461$

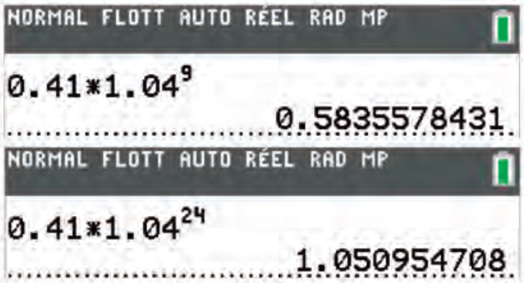
3. Expression explicite de u_n

D'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 q^n$ donc $u_n = 0{,}41 \times 1{,}04^n$.

Suite géométrique et somme

4. Prévision

Le 4ème trimestre 2016 correspond à u_0, donc le 4ème trimestre 2017 correspond à u_4, puis le 4ème trimestre 2018 à u_8 et donc le 1er trimestre 2019 correspond à u_9. On a $u_9 = 0{,}41 \times 1{,}04^9 \approx 0{,}584$



Et le 4ème trimestre 2022 correspond à $u_{24} = 0{,}41 \times 1{,}04^{24} \approx 1{,}051$

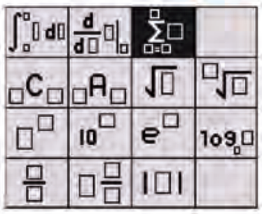
Ce qui représente 1 million 51 mille abonnements.

5. Calcul de somme

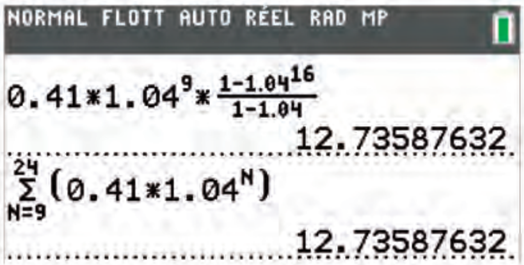
Le nombre total de nouveaux abonnés de 2019 à 2022 est

$$u_9 + u_{13} + \cdots + u_{24} = u_9 \times \frac{1-q^{16}}{1-q} = 0{,}41 \times 1{,}04^9 \times \frac{1-1{,}04^{16}}{1-1{,}04} \approx 12{,}736$$

On peut vérifier ce calcul avec notre calculatrice à l'aide du symbole Σ accessible dans 2nde :



$$\sum_{n=9}^{24} u_n = \sum_{n=9}^{24} 0{,}41 \times 1{,}04^n = 12{,}736$$



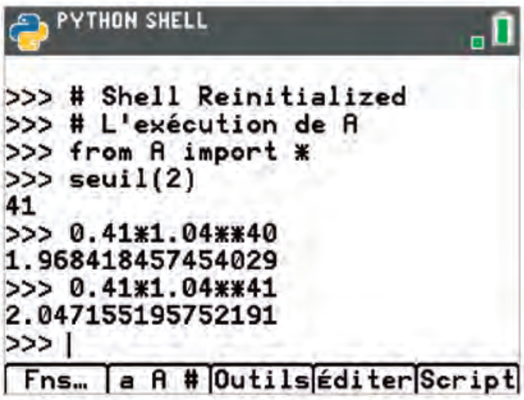
Ce qui représente 12 millions sept cent trente-six mille abonnements.

6. Algorithme de seuil

On complète le script avec la condition `u<a` et pour calculer le terme suivant de la suite on écrit : `u=1.04*u`.

Après avoir exécuté le script on lance `seuil(2)` et on obtient `n=41`.

On vérifie en console en calculant u_{40} et u_{41} et on constate que 41 est bien la bonne réponse. 41 correspond au 1er trimestre 2027



Comparaison suite arithmétique et suite géométrique

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com - Lisa

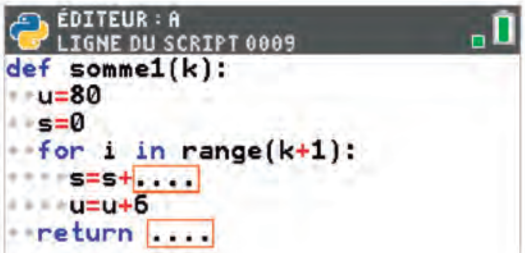
Anne et Bastien comparent les étrennes qu'ils reçoivent chaque année. En 2020, Anne a reçu 80€ et Bastien 100€. Chaque année, les étrennes d'Anne augmentent de 6€ et celles de Bastien de 3 %. Pour tout entier n, on note u_n et v_n les étrennes reçues par Anne et Bastien l'année $2020 + n$.
On a donc $u_0 = 80$ et $v_0 = 100$.

1. a. Calculer les étrennes qu'ont reçues Anne et Bastien en 2021, puis en 2022.
   b. Donner la nature de la suite (u_n). En déduire u_n en fonction de n.
   c. Donner la nature de la suite (v_n). En déduire v_n en fonction de n.

2. Représenter graphiquement ces deux suites et déterminer en quelle année Anne reçoit pour la première fois davantage que Bastien. Bastien recevra-t-il alors toujours moins qu'Anne ?

3. On note S_n et T_n la somme des étrennes reçues per Anne et Bastien de l'année 2020 jusqu'à l'année $2020 + n$.
On a donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.
Calculer S_{15} et T_{15}.

4. Compléter la fonction **somme1** écrite en Python ci-contre qui prend comme argument k et qui renvoie S_k. Exécuter la fonction et vérifier le calcul de S_{15} précédent. Ecrire une fonction **somme2** qui prend comme argument k et qui renvoie T_k puis exécuter la fonction et vérifier le calcul de T_{15} précédent.



1.a. Les étrennes en 2021

Chaque année les étrennes d'Anne augmentent de 6€, elle va donc recevoir en 2021 $u_1 = 80 + 6 = 86$ et $u_2 = u_1 + 6$ donc $u_2 = 92$.
Celles de Bastien augmentent de 3%. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 3% est 1,03. Donc $v_1 = 100 \times 1{,}03 = 103$ et $v_2 = v_1 \times 1{,}03 = 106{,}09$.

1.b. Nature de la suite (u_n)

On sait que chaque année les étrennes d'Anne augmentent de 6€. Donc pour passer d'un terme u_n de la suite, au terme u_{n+1} suivant, on ajoutera 6.

Ainsi pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n + 6$. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $u_0 = 80$. D'après le cours on a :
Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = 80 + 6n$.

1.c. Nature de la suite (v_n)

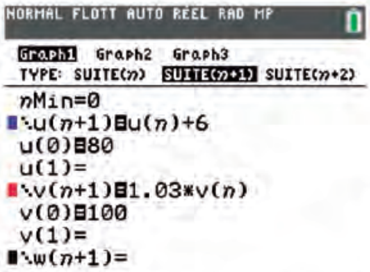
Les étrennes de Bastien augmentent de 3%. Donc pour passer d'un terme v_n de la suite, au terme v_{n+1} suivant, on multiplie par $1{,}03$.

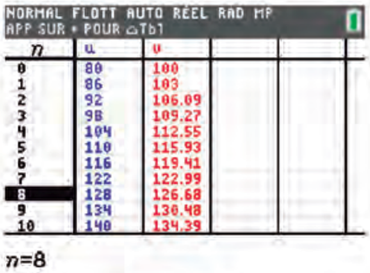
Donc pour tout entier n on a $v_{n+1} = 1{,}03 v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = 100$. D'après le cours on a :
$v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 100 \times 1{,}03^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comparaison suite arithmétique et suite géométrique

2. Représentation graphique

Pour saisir une suite il faut d'abord appuyer sur mode puis sélectionner **SUITE**. Puis dans f(x) sélectionner **SUITE(n+1)** pour une suite définie par récurrence.

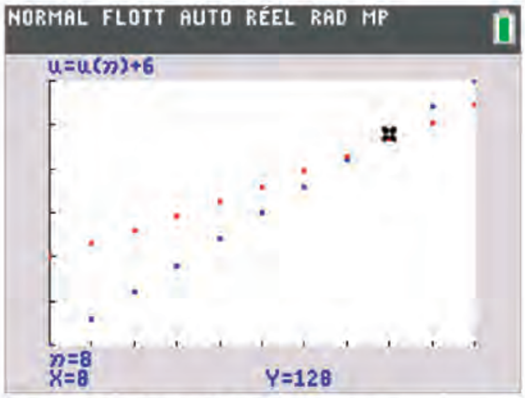


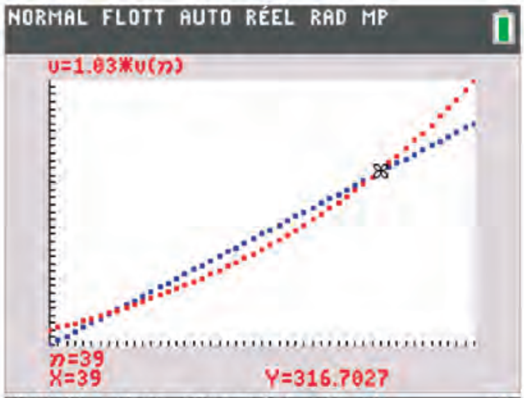


n	u	v
0	80	100
1	86	103
2	92	106.09
3	98	109.27
4	104	112.55
5	110	115.93
6	116	119.41
7	122	122.99
8	128	126.68
9	134	130.48
10	140	134.39

Pour obtenir une fenêtre adéquate, appuyer sur zoom 0 .
En appuyant sur trace à l'aide des flèches de direction, on constate qu'Anne va toucher plus que Bastien à partir de $n = 8$ soit en 2028. On peut le vérifier à l'aide du tableau de valeurs en appuyant sur 2nde graphe.

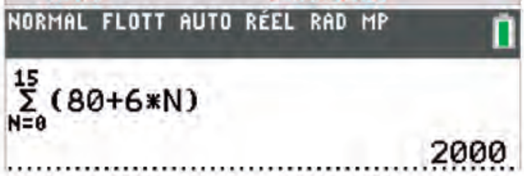
En modifiant la fenêtre (touche fenêtre) on constate que Bastien touche à nouveau plus qu'Anne à partir de $n = 39$, soit en 2059.

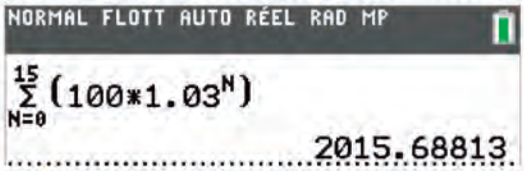




3. Calculs de sommes

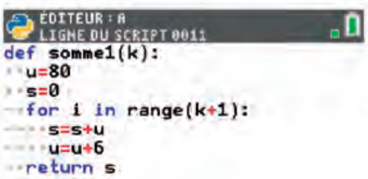
(u_n) est une suite arithmétique donc d'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$ donc $S_{15} = 16 \times \frac{u_0+u_{15}}{2}$
On sait que $u_0 = 80$ et d'après 1.b. $u_{15} = 80 + 15 \times 6 = 170$ donc
$S_{15} = 16 \times \frac{80+170}{2} = 2000$. On peut vérifier ce calcul avec le symbole Σ de notre calculatrice accessible en appuyant sur 2nde $\frac{\square}{\square}$.
(v_n) est une suite géométrique donc d'après le cours :
$T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $T_{15} = 100 \times \frac{1-1{,}03^{16}}{1-1{,}03} \approx 2015{,}69$.
Vérifions ce résultat à l'aide de notre calculatrice :

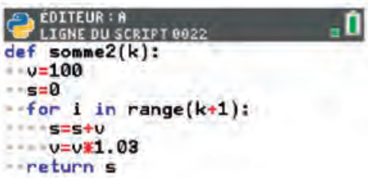




4. Somme et Python

On complète la ligne **s=s+u** pour ajouter la valeur courante de **u** à la variable **s** à chaque tour de boucle. Puis on termine en renvoyant la valeur de **s**.
La fonction **somme2** est semblable à la fonction **somme1**. Il faut juste changer la valeur initiale de la suite (**v=100**) et le calcul de la nouvelle valeur de **v** (**v=v*1.03**). En exécutant les deux fonctions on retrouve bien les résultats de la question précédente.





Thème : Suite et Python

Intérêts simples et intérêts composés

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pixels.com – Tek Image

On place un capital C_0, appelé capital initial à un taux annuel de t %.

1. On note (u_n) la suite représentant le capital obtenu au bout de n années si le placement est à intérêts simples au taux de 5% et (v_n) la suite représentant le capital obtenu au bout de n années si le placement est à intérêts composés au taux de 4%. On fixe $C_0 = 10\,000$€. Identifier la nature de chaque suite et donner leur expression en fonction de n.
2. Utiliser le mode **SUITE** de la calculatrice pour connaître la durée minimale de placement dans chaque cas afin que le capital acquis atteigne au moins 15 000€.
3. Au bout de combien d'années le capital acquis avec (v_n) (intérêts composés) dépassera le capital acquis avec (u_n) (intérêts simples) ? On réalisera un script en Python pour répondre à cette question.
4. A l'aide du langage Python, créer une fonction **actuel** qui renvoie le capital C_0 qu'il faut placer aujourd'hui à intérêts composés pendant n années à un taux t % pour obtenir un capital C fixé.

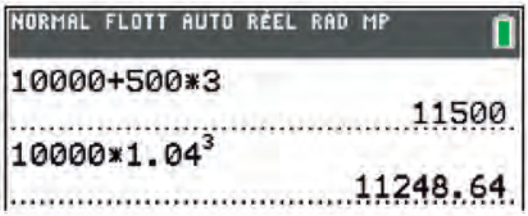
1. Nature des suite (U_n) et (V_n)

→ On rappelle qu'un capital est placé à intérêts simples lorsque seul le capital de départ produit l'intérêt pendant toute la durée du placement. Ici les intérêts produits par an sont donc égaux à 5% de 10 000€ soit 500€.

Ainsi chaque terme de la suite (u_n) est obtenu en ajoutant 500 au terme précédent, c'est une suite arithmétique de raison 500 et de premier terme $u_0 = C_0 = 10\,000$ donc $u_n = 10\,000 + 500n$ pour tout entier naturel n.

→ Lorsqu'un capital est placé à intérêts composés, à la fin de chaque année, l'intérêt gagné est capitalisé pour produire lui aussi un intérêt.

Dans notre cas, le taux annuel étant de 4%, le capital augmente de 4% chaque année, il est alors multiplié par 1,04 : ainsi chaque terme de la suite (v_n) est obtenu en multipliant par 1,04 le terme précédent.

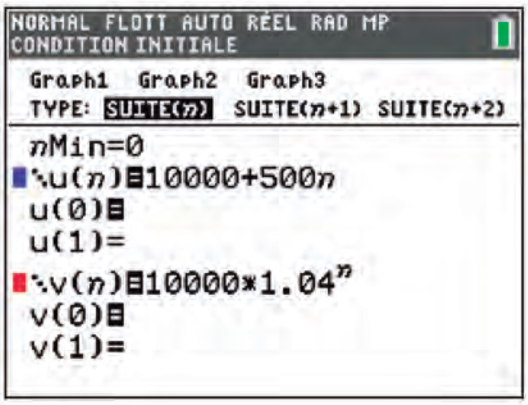


Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = C_0 = 10\,000$ donc $v_n = 10\,000 * 1{,}04^n$ pour tout entier naturel n.

Après 3 années les capitaux acquis sont respectivement égaux à 11 500€ et 11 248,64€.

2. Mode SUITE

Tout d'abord, on bascule la calculatrice en mode **SUITE** et on définit les suites (u_n) et (v_n).

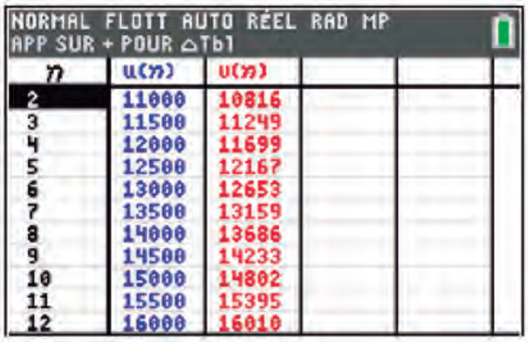


Intérêts simples et intérêts composés

On utilise ensuite la table des valeurs avec les touches [2nde] [graphe] (table f5) pour identifier les valeurs de n recherchées.

On lit que $u_{10} = 15000$ et que $v_{11} \approx 15395$.

La durée minimale pour disposer d'au moins 15 000€ est donc de 10 ans pour le placement à intérêts simples au taux annuel de 5 % et de 11 ans pour le placement à intérêts composés au taux annuel de 4 %.



3. Définir `seuil` en Python

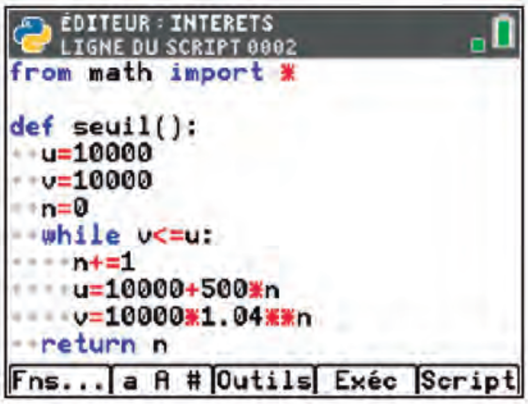
On lance l'environnement Python avec la touche [prgm] (dessin D) puis on crée un nouveau script ([zoom] (format f3) pour l'onglet `Nouv`) que l'on nomme `INTERETS` de type `Calculs Mathématiques` ([zoom] (format f3) onglet `Types`).

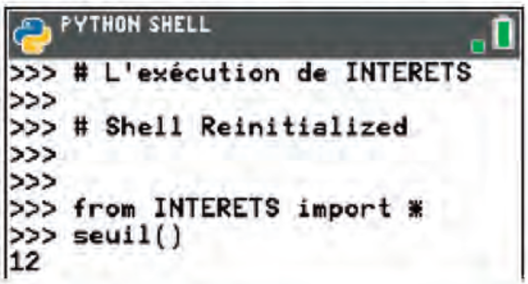
La fenêtre de script s'ouvre et la librairie math est déjà importée.

On complète le script `INTERETS` avec la fonction **`seuil`** qui renverra le nombre d'années nécessaires pour que le terme v_n dépasse le terme u_n. Attention à la condition du `while` puisque les deux termes initiaux sont identiques, il faut choisir $\leq$ et donc taper `<=` en Python.

On exécute le script à l'aide de l'onglet `Exéc`, touche [trace] (calculs f4) : l'écran affiche alors le shell Python lié à notre script.

Avec la touche [var] (distrib), on sélectionne la fonction **`seuil`** qui renvoie 12 après exécution ce qui signifie qu'il faut douze années pour que le capital v_n dépasse le capital u_n ce que confirme l'observation de la table des valeurs.



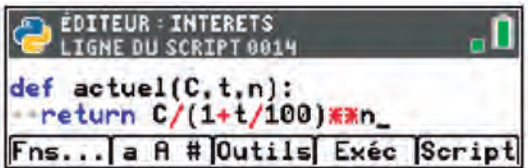


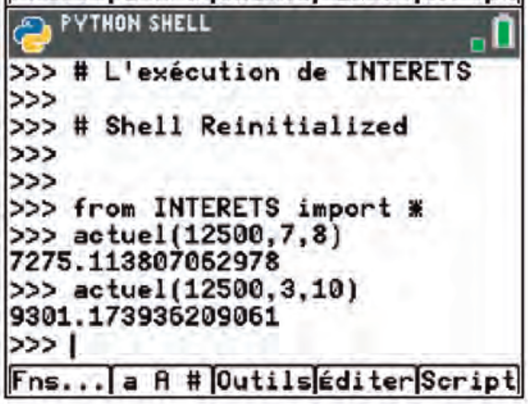
4. Définir `actuel` en Python

Puisque C sera le capital acquis par placement du capital C_0 (qui s'appelle la valeur actuelle) à un taux annuel de t % pendant n années, par analogie avec l'étude de la suite (v_n) on a $C = C_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ et donc $C_0 = \frac{C}{\left(1+\frac{t}{100}\right)^n}$.

On complète le script `INTERETS` avec la fonction **`actuel`** de paramètres `C`, `t` et `n`, qui renvoie le capital initial qu'il faut placer aujourd'hui à un taux annuel de t % pour disposer du capital désiré C au bout de n années.

Par exemple, pour disposer de 12 500€ dans 8 ans à un taux annuel de 7 %, il faut placer environ 7275 €. Pour disposer de la même somme dans 10 ans à un taux annuel de 3 % il faut placer environ 9301 €.





Introduction aux fonctions exponentielles

Enoncé

Un pays imaginaire connaît une grave épidémie virale. Au premier janvier 2021, 1 million de personnes sont contaminées. On considère que le nombre de personnes contaminées augmente de 20% chaque mois.

n étant un nombre entier naturel, on note c_0 le nombre de millions de personnes contaminées au premier janvier 2021 et c_n le nombre de millions de personnes contaminées au bout de n mois suivant cette date.
Ainsi $c_0 = 1$.

Crédit photo : www.pixels.com – Dmitry Skvortsov

1. Calculer c_6, le nombre de millions de personnes contaminées au premier juillet 2021 (arrondir au millier près) puis exprimer c_n en fonction de n.

Représenter graphiquement le nuage de points $M(n, c_n)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. On voudrait donner une estimation du nombre de millions de personnes contaminées au 15 avril 2021. Proposer une réponse en s'aidant du graphique réalisé.

3. Si on considère que le pays a 40 millions d'habitants et que l'épidémie croît au même rythme de 20% par mois, combien de temps faudrait-il pour que la totalité de la population soit contaminée ?

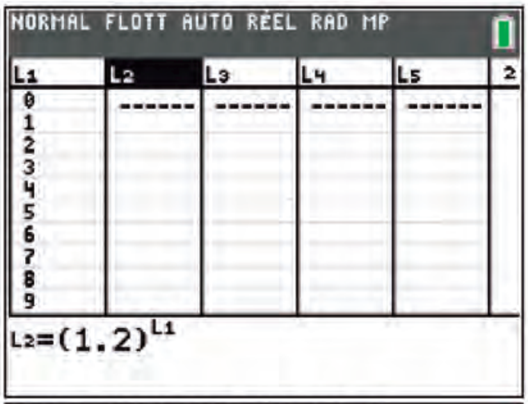
1. Suite géométrique

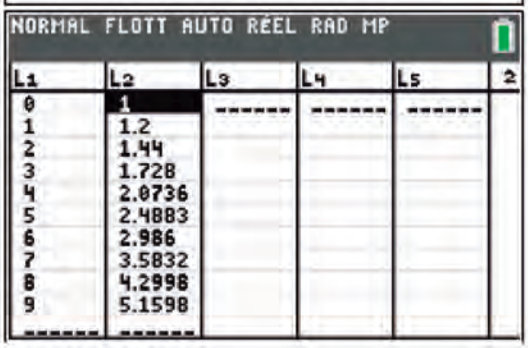
Nous savons qu'une augmentation de 20% correspond à multiplier par un coefficient de 1,2 soit successivement $c_1 = 1{,}2c_0$, $c_2 = 1{,}2c_1$, $c_3 = 1{,}2c_2$, $c_4 = 1{,}2c_3$, $c_5 = 1{,}2c_4$ et $c_6 = 1{,}2c_5 = (1{,}2)^6 c_0 \approx 2{,}986$ soit environ 2986000 personnes contaminées au premier juillet 2021.

On reconnaît ainsi une suite géométrique (c_n) de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $c_0 = 1$ d'où $c_n = c_0 q^n = (1{,}2)^n$ pour tout entier naturel n.

Pour représenter le nuage de points $M(n, c_n)$ on entre les données dans les listes de la calculatrice, on appuie sur stats `Modifier…`

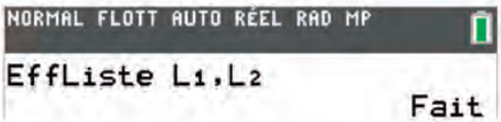
On entre les rangs des mois dans la liste L_1 puis on calcule les valeurs de la liste L_2 à l'aide de la formule $(1.2)^{L_1}$.





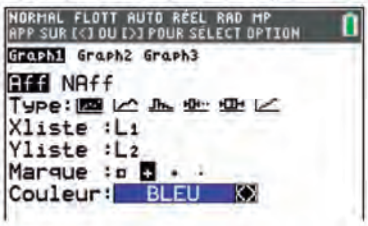
Remarque : Pour effacer des données déjà présentes :

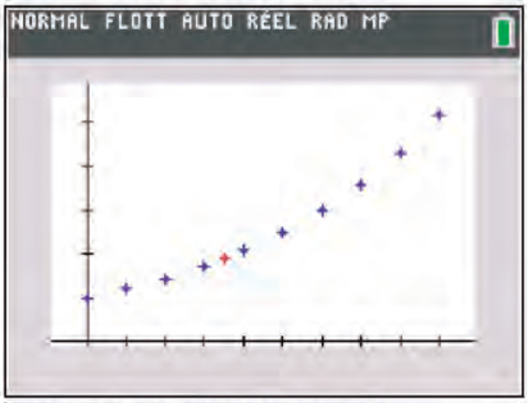
Appuyer sur stats `EffListe` puis choisir le nom des listes à effacer en les séparant par une virgule. Par exemple pour effacer le contenu des listes L_1 et L_2 on entre



Pour représenter graphiquement ces deux listes, on paramètre la fenêtre graphique en appuyant sur [2nde] [f(x)] (graph stats).
Afin d'ajuster au mieux la fenêtre, appuyer sur [zoom] choix 9:**ZoomStat**

Remarque : Pensez à bien effacer les expressions des fonctions pour ne pas avoir un affichage « parasite ».



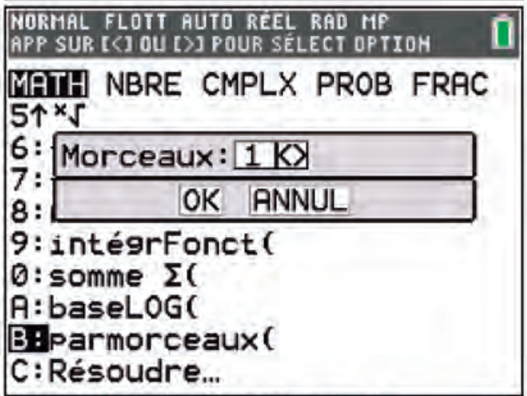


2. Estimation

Nous allons estimer le nombre de millions de personnes contaminées au 15 avril 2021.

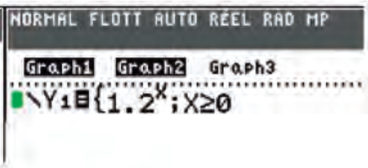
1ère idée : on s'aperçoit que le 15 avril se situe au milieu des mois de rang 3 et 4 : on réalise donc une interpolation linéaire en intercalant entre les deux points déjà construits des mois de rang 3 et 4 un troisième point ayant pour abscisse (respectivement pour ordonnée) la moyenne arithmétique des abscisses (respectivement des ordonnées) des deux points initiaux. On trouve ici $\frac{(1,2)^3+(1,2)^4}{2} \approx 1{,}9$ pour l'ordonnée de ce point.

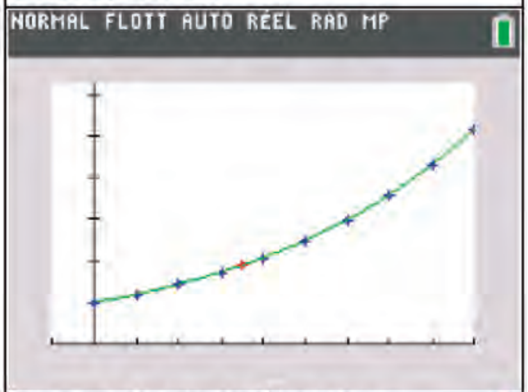
2ème idée : puisque le 15 avril correspond à la moitié du mois d'avril on essaie de prolonger à des valeurs positives non entières la suite géométrique (c_n) et on calcule alors $c_{3,5} = (1{,}2)^{3,5} \approx 1{,}89$.



Nous venons donc de définir une nouvelle fonction f sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}2^x$. (Passage d'un modèle **discret** à un modèle **continu**).

Pour tracer cette fonction sur le même graphique, appuyer sur [f(x)] puis sur [math] choix **B:parmorceaux** avec un morceau et grâce à [2nde] [math] on rajoute des conditions pour respecter l'intervalle de définition :

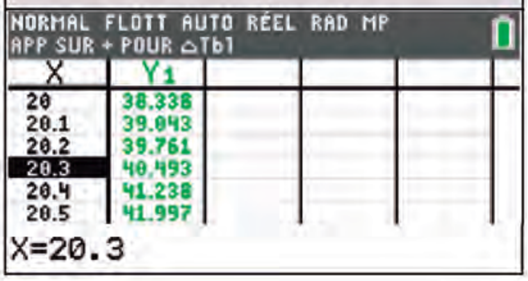




3. Prévision

Avec cette nouvelle fonction, on doit résoudre l'inéquation $f(x) \geq 40$ soit $1{,}2^x \geq 40$.

Par balayage à l'aide de la calculatrice on trouve $x \approx 20{,}3$ mois c'est-à-dire que sur la base de ce modèle, la totalité de la population sera contaminée après 1 an 8 mois et 9 jours environ.



Thème : Analyse

Décroissance exponentielle et logarithme décimal

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Une ville lutte contre des rongeurs nuisibles. Au début, la population des rongeurs est estimée à 100 000 individus.

Crédit photo : www.pixels.com – Patricia Bergey

n étant un nombre entier naturel, on note u_0 le nombre de rongeurs le 1er jour et u_n le nombre de rongeurs au bout de n jours. Ainsi $u_0 = 100\ 000$.

1. Les mesures prises par la municipalité pour la destruction des rongeurs font baisser leur population chaque jour. Le nombre d'individus est donné dans le tableau ci-dessous :

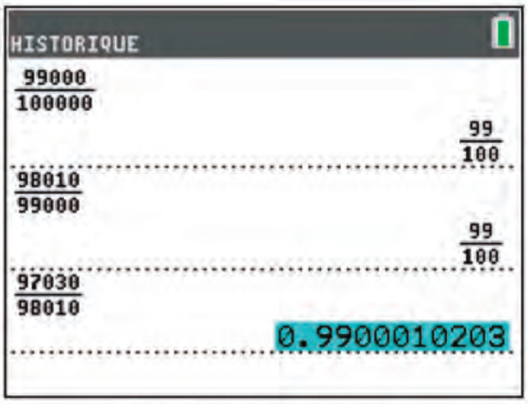
jour	1	2	3	4
Nombre de rongeurs	100 000	99 000	98 010	97 030

Peut-on assimiler cette diminution à un modèle de décroissance exponentielle ?

2. Grâce à ce modèle, utiliser la fonction logarithme décimal pour calculer le nombre de jours nécessaires pour que le nombre de rongeurs soit inférieur à 10 000 individus, puis à 1 000 individus.

3. A l'aide du langage Python, créer une fonction **`seuil`** qui renvoie le nombre de jours n pour lequel le nombre de rongeurs est inférieur à la valeur P donnée en paramètre de la fonction. Vérifier alors les résultats de la question précédente.

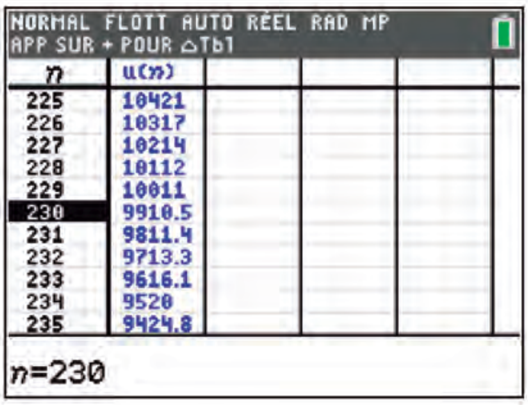
1. Décroissance exponentielle



Pour savoir si les données relevées par la municipalité suivent un modèle de décroissance exponentielle, nous devons comparer les quotients successifs de la suite (u_n). Or nous lisons sur le tableau $u_0 = 100\ 000$, $u_1 = 99\ 000$, $u_2 = 98\ 010$ et $u_3 = 97\ 030$. Nous constatons alors que les quotients $\frac{u_{i+1}}{u_i}$ pour $i = 0, 1$ et 2 sont tous égaux ou très proche de 0,99 ce qui correspond à une baisse de $1 - 0{,}99 = 0{,}01 = 1\%$ par jour.

On peut donc assimiler cette diminution à un modèle de décroissance exponentielle.

2. Logarithme décimal



Ainsi la suite (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}99$ et de premier terme $u_0 = 100\ 000$ d'où $u_n = u_0 q^n = 100\ 000 \times 0{,}99^n$ pour tout entier naturel n.

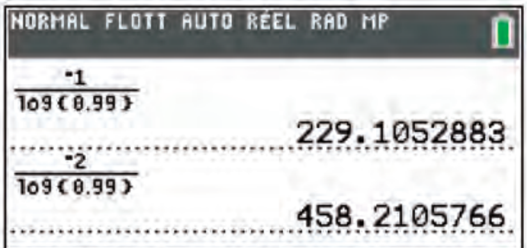
Le problème consiste donc à trouver la plus petite valeur de n, entier, à partir de laquelle on a $u_n \leq 10\ 000$. On a déjà vu dans ce livret comment trouver ce seuil à partir d'une table de valeurs, c'est-à-dire par tâtonnements (voir ci-contre).

Décroissance exponentielle et logarithme décimal

On va maintenant utiliser la fonction **log**, outil permettant d'obtenir directement la réponse.

Tout d'abord $u_n \leq 10\,000 \Leftrightarrow 100\,000 \times 0{,}99^n \leq 10\,000 \Leftrightarrow 0{,}99^n \leq \frac{1}{10}$.

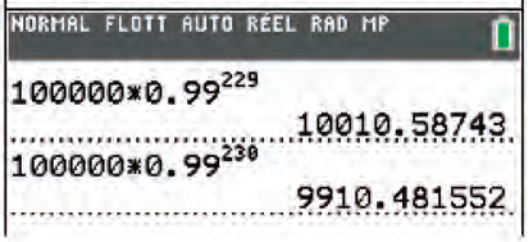
Puisque la fonction **log** est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ on obtient $0{,}99^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log(0{,}99^n) \leq \log\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n \times \log(0{,}99) \leq -1 \Leftrightarrow n \geq \frac{-1}{\log(0{,}99)}$.



Remarque : A la dernière étape, on a divisé chaque membre de l'inégalité par $\log(0{,}99)$. Or $0 < 0{,}99 < 1$ donc $\log(0{,}99) < 0$ et on change le sens de l'inégalité !

On trouve alors que n doit être supérieur à 229,1 soit à partir de $n = 230$.

A partir du 230ème jour, le nombre de rongeurs sera passé au-dessous de 10 000 individus. Conseil : vérifier le résultat obtenu en calculant $u_{229} = 100\,000 \times 0{,}99^{229}$ et $u_{230} = 100\,000 \times 0{,}99^{230}$.

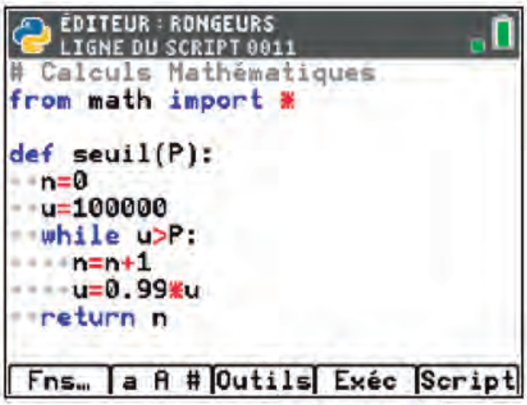


En reprenant la démarche pour que le nombre de rongeurs soit inférieur à 1 000 individus on trouve $\log(0{,}99^n) \leq \log\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\log(0{,}99)}$ car $\log\left(\frac{1}{100}\right) = -\log(100) = -2$. On trouve que n doit être supérieur à 458,2 soit à partir de $n = 459$ ce qui correspond à une année et 94 jours.

3. Définir **seuil** en Python

On lance l'environnement Python avec la touche [prgm] puis on crée un nouveau script ([zoom] pour l'onglet Nouv) que l'on nomme RONGEURS de type Calculs Mathématiques ([zoom] onglet Types).

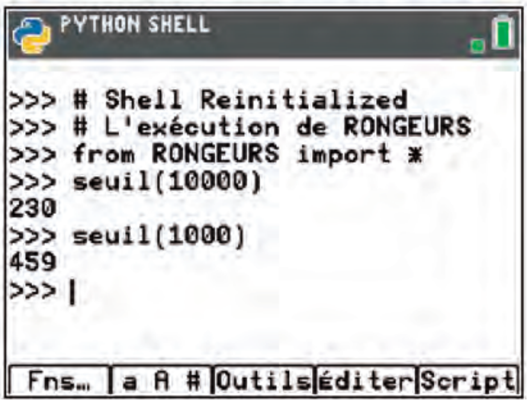
La fenêtre de script s'ouvre et la librairie math est déjà importée.



On complète le script RONGEURS avec la fonction **seuil** de paramètre P, qui renvoie le nombre n de jours nécessaires pour que le nombre de rongeurs dans la ville soit inférieur à la valeur P.

Remarque : lors de la boucle `while` (le nombre d'itérations étant recherché ici) on choisit le calcul du terme suivant avec la formule $u = 0{,}99 * u$ et non pas $u = 100\,000 * 0{,}99 ** n$ pour nous habituer en programmation à minimiser le coût lors de l'exécution (un produit versus une puissance) !

On exécute le script à l'aide de l'onglet Exéc, touche [trace] : l'écran affiche alors le shell Python lié à notre script.



Avec la touche [var], on sélectionne la fonction **seuil** et on complète avec la valeur 10 000 (on peut aussi saisir directement `seuil(10000)`). La fonction renvoie 230, ce qui est cohérent avec la question précédente.

De même avec l'instruction `seuil(1000)`, on obtient bien 459.

Fonction exponentielle - Algorithme par balayage

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes. En 2014, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde parcourt le Brésil en reliant la centrale hydro-électrique de Porto Velho à Araraquara dans l'état de Sao Paulo. Elle mesure environ 2 300 km ; sa puissance électrique initiale est de 3150 MW et le courant est transporté sous une tension de 600 kV.

Crédit photo : www.pexels.com – Ali Arapoğlu

La puissance électrique au bout des 2 300 km de la ligne est de 2 940 MW.

1. a. Calculer le pourcentage des pertes de puissance électrique sur la ligne Porto Velho – Araraquara.

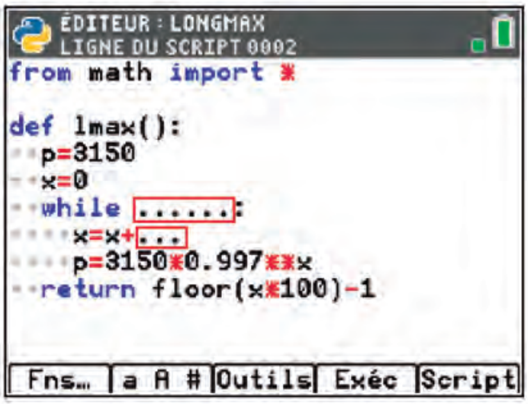
b. Calculer le taux d'évolution moyen de la puissance électrique aux 100 km sur cette ligne électrique.

2. Dans cette question, la puissance électrique (en méga-watts) restant dans une certaine ligne électrique à courant continu au bout de x centaines de kilomètres est donnée par la fonction P définie sur $[0\,;+\infty[$ par $P(x) = 3\,150 \times 0{,}997^x$.

a. Montrer que la fonction P est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Compléter la fonction **lmax** du script Python LONGMAX ci-contre qui renvoie la longueur maximale (arrondie au kilomètre près) d'une ligne électrique, à l'aide d'un algorithme par balayage, pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 8%.

Retrouver ce résultat par résolution graphique à l'aide de la calculatrice puis par le calcul en utilisant le logarithme décimal.



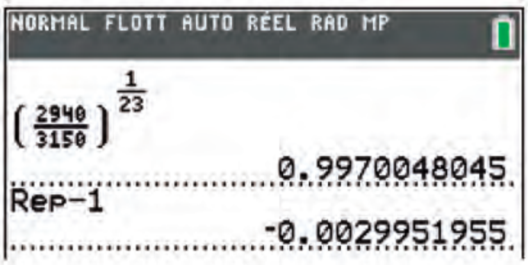
1.a. Perte de puissance

La perte sur cette ligne est de $3\,150 - 2\,940 = 210$ pour une puissance initiale de 3 150. La perte est donc égale à $\frac{210}{3150} \approx 0{,}067 = \frac{6{,}7}{100} = 6{,}7\ \%$.

1.b. Taux moyen de perte aux 100 km

Soit t le pourcentage d'évolution de la puissance électrique aux 100 km. Puisque la ligne mesure 2 300 km, cela correspond à 23 centaines donc la valeur de t vérifie l'équation : $(1+t)^{23} = \frac{2940}{3150}$ ce qui permet d'obtenir

$t = \left(\frac{2940}{3150}\right)^{\frac{1}{23}} - 1 \approx -0{,}002995$ soit une perte moyenne d'environ 0,3 % par centaine de kilomètres. On utilise les touches [^] et [÷] pour accéder à ces fonctionnalités sur la calculatrice.

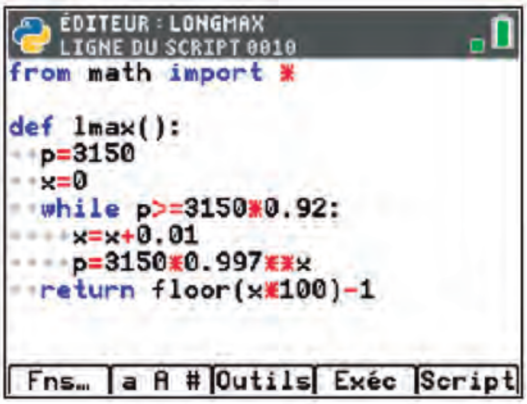


Fonction exponentielle - Algorithme par balayage

2.a. Décroissance exponentielle

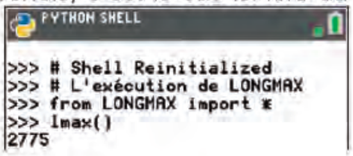
D'après le cours, puisque $3\,150 > 0$, la fonction P a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto 0{,}997^x$ qui est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ car $0 < 0{,}997 < 1$.

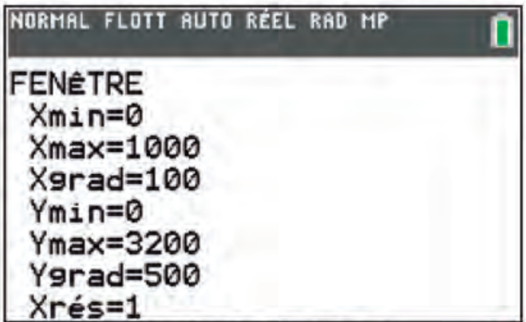
2.b. Longueur maximale



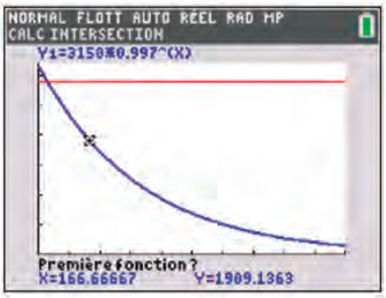
p représente la puissance, elle ne doit pas perdre plus de 8% ce qui se traduit par l'instruction **`p>=3150*0.92`**. La variable **x** correspond à des centaines de kilomètres, ainsi puisque l'on souhaite trouver une longueur maximale arrondie au km près, nous devons réaliser un balayage avec un pas de 0,01. Enfin en programmation, en raison du codage des nombres réels, nous sommes souvent confrontés à utiliser des arrondis, c'est le cas ici lors du renvoi de la valeur recherchée.

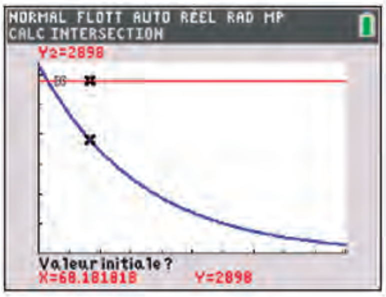
On exécute le script et on lance la fonction **`lmax`** en appuyant sur [var].

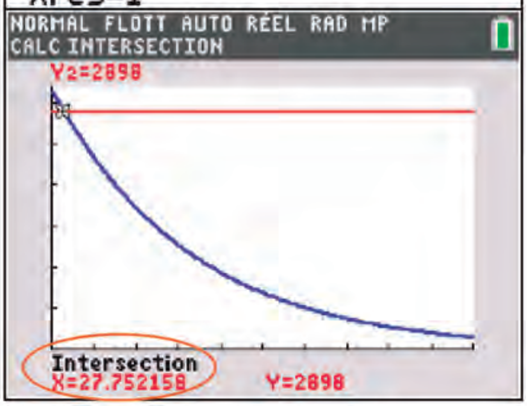




- Pour retrouver ce résultat à l'aide d'un graphique, nous entrons la fonction P dans Y_1 et la fonction constante égale à $3\,150 \times 0{,}92 = 2\,898$ dans Y_2. On représente alors ces deux fonctions avec [graphe] après avoir configuré la fenêtre d'affichage. Puis on choisit le menu `calculs`, à l'aide des touches [2nde] [trace] et on sélectionne la commande `5:intersection`. De retour au graphique, on valide le choix de Y_1, celui de Y_2 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché :







- Enfin pour retrouver ce résultat par calcul, on résout l'inéquation $P(x) \geq 0{,}92 \times P(0)$ qui est équivalente à $0{,}997^x \geq 0{,}92$.

On utilise alors le logarithme décimal et puisque $\log(0{,}997) < 0$ car $0 < 0{,}997 < 1$ cette inéquation équivaut à $x \leq \frac{\log(0{,}92)}{\log(0{,}997)}$.

On trouve à nouveau une longueur maximale de la ligne électrique égale à 2 775 km arrondie au km près.

Niveau d'intensité sonore et repère semi-logarithmique

Enoncé

L'intensité sonore I (en W.m^{-2}) est égale à $I = \frac{P}{S}$ où P (en watts) est la puissance de la source sonore et S (en m²) est la surface de la sphère de l'onde sonore. On rappelle que $S = 4\pi R^2$ où R est le rayon de la sphère.

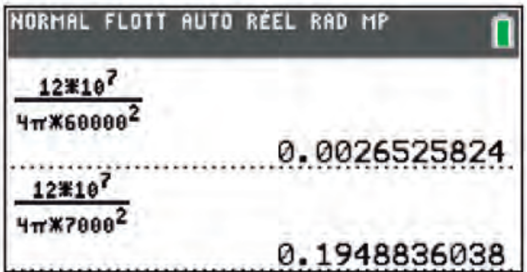
Pour comparer les intensités sonores entre elles, on utilise la notion de niveau d'intensité sonore, noté L et exprimé en décibels (dB). Ce niveau d'intensité sonore est lié à l'intensité par une échelle logarithmique grâce à la formule $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I_0 est une intensité sonore de référence égale à 10^{-12} W.m^{-2} appelée seuil d'audibilité par l'oreille humaine.

Crédit photo : www.pexels.com – Pixabay

1. Naïs, en vacances en Guyane va assister au décollage de la fusée Ariane depuis la capitale Cayenne. Sa sœur Camille a reçu une invitation pour assister au décollage depuis le centre spatial de Kourou. On sait que la puissance sonore P de la fusée Ariane au décollage est égale à 12×10^7 W, la distance entre le pas de tir de la fusée et Cayenne est de 60 km et la distance du centre spatial au pas de tir de la fusée est de 7 km.
   a. Calculer l'intensité sonore perçue par Naïs et Camille lors du décollage.
   b. En déduire le niveau sonore perçu par chacune. Sachant que le seuil de douleur pour l'oreille humaine se situe à partir de 110 dB, conseillez-vous à Naïs et Camille de porter des bouchons d'oreilles lors du décollage de la fusée ?
2. Grâce aux valeurs constantes, nous pouvons simplifier la formule calculant le niveau sonore en $L = 120 + 9{,}2\log\left(\frac{P}{13R^2}\right)$. On considère alors une machine dans un atelier d'une puissance sonore P égale à $0{,}01$ W.
   a. Démontrer que $L = 101{,}6 - 9{,}2\log(13) - 18{,}4\log(R)$. Que devient le niveau d'intensité sonore lorsque la distance est multipliée par 100 ?
   b. A l'aide de la calculatrice, représenter le niveau sonore L en fonction de la distance R dans un repère semi-logarithmique, pour R variant de 1 à 100. Par lecture graphique, déterminer à quelle distance on se trouve de la machine lorsque le niveau d'intensité sonore est de 60 dB.
   c. Préciser ce résultat par le calcul (arrondir à l'unité).

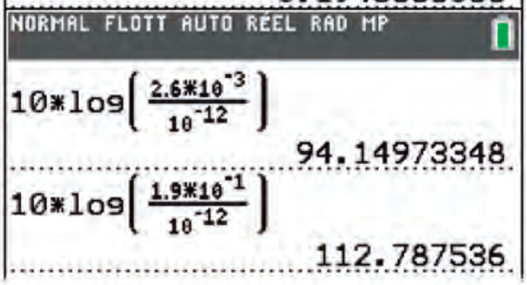
1.a. Intensité sonore

Pour déterminer les intensités sonores perçues, nous utiliserons la formule $I = \frac{P}{4\pi R^2}$ puisque $S = 4\pi R^2$ en n'oubliant pas d'exprimer la distance R en mètres. On obtient donc pour Naïs une intensité $I \approx 2{,}6 \times 10^{-3}$ W.m^{-2} et pour Camille une intensité $I \approx 1{,}9 \times 10^{-1}$ W.m^{-2}. Utiliser les touches 2nde trig pour obtenir π.



1.b. Niveau sonore

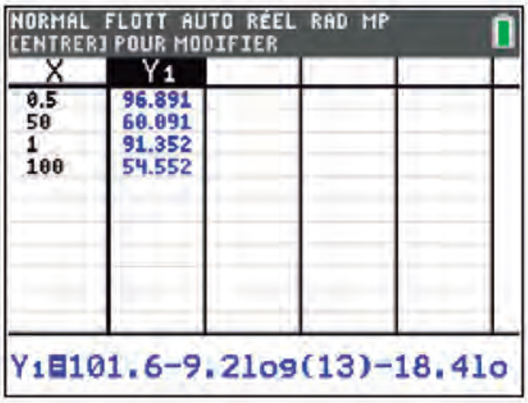
Grâce à $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ le niveau sonore perçu par Naïs est d'environ 94,1 dB et celui perçu par Camille est d'environ 112,8 dB. On utilisera la touche log de la calculatrice.



Niveau d'intensité sonore et repère semi-logarithmique

Nous pouvons ainsi conseiller à Camille de porter des bouchons d'oreilles pour réduire le niveau sonore car elle se trouve dans le seuil de douleur. Naïs en revanche ne risque rien sans bouchons d'oreilles.

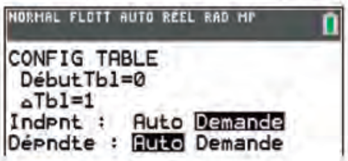
2.a. Niveau sonore et distance



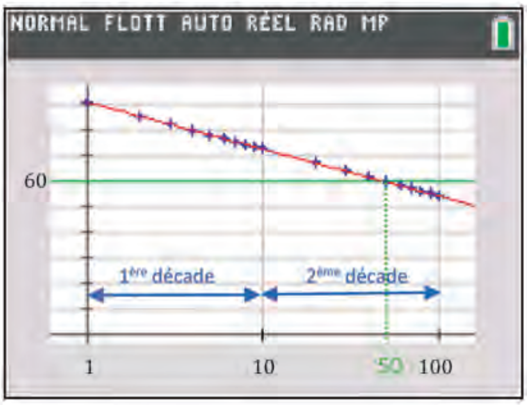
Puisque $L = 120 + 9{,}2\log\left(\frac{0{,}01}{13R^2}\right) = 120 + 9{,}2\log(0{,}01) - 9{,}2\log(13R^2)$, on a bien $L = 101{,}6 - 9{,}2\log(13) - 18{,}4\log(R)$ car $\log(0{,}01) = -2$, $\log(13R^2) = \log(13) + \log(R^2)$ et $\log(R^2) = 2\log(R)$.

Lorsque la distance est multipliée par 100 soit $R' = 100R$, on obtient $\log(100R) = \log(100) + \log(R) = 2 + \log(R)$ donc le niveau d'intensité sonore diminue de 36,8 dB.

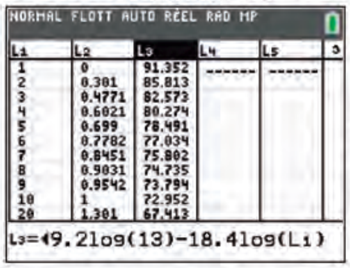
Après avoir saisi l'expression de la fonction L dans **Y₁** grâce au menu [f(x)] et réglé le paramètre `Indpt` sur **Demande** de la table des valeurs à l'aide des touches [2nde] [fenêtre] (déf table f2) on peut vérifier ce résultat à la calculatrice avec quelques valeurs de R.

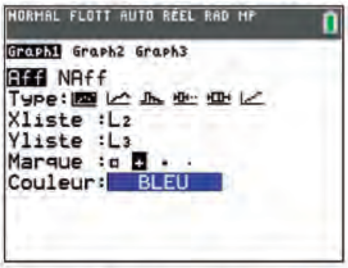


2.b. Repère semi-logarithmique



Le repère semi-logarithmique est gradué sur l'axe des abscisses par des valeurs telles que $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$ et $\log(100) = 2$. On les appelle des décades car elles correspondent aux puissances de 10. On modifie les listes avec [stats] : dans la liste **L₁** on entre les valeurs de 1 à 10 puis les multiples de 10 jusqu'à 100. Dans **L₂** on entre la formule tout en haut de la liste **L₂** : `L2=log(L1)` et enfin dans **L₃** on définit le niveau sonore L.

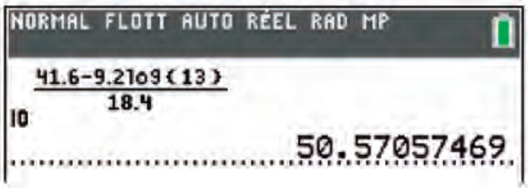




Pour afficher le nuage de points **L₃** en fonction de **L₂** : [2nde] [f(x)] (graph stats).

Sur le graphique obtenu, pour un niveau d'intensité sonore de 60 dB, on lit que l'on se trouve à environ 50 mètres de la machine.

2.c. Distance



Pour trouver R par calcul correspondant à L = 60 dB, on résout l'équation :

$$60 = 101{,}6 - 9{,}2\log(13) - 18{,}4\log(R)$$

qui équivaut à $\log(R) = \frac{41{,}6 - 9{,}2\log(13)}{18{,}4}$ soit $R = 10^{\frac{41{,}6-9{,}2\log(13)}{18{,}4}}$.

A l'aide de la séquence de touches [2nde] [log] (10ˣ) [n/d] sur la calculatrice, on obtient que $R \approx 51$ mètres à l'unité près.

Thème : Analyse

Taux d'évolution moyen - Racine $n^{\text{ième}}$

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Nous allons étudier le cours d'une crypto-monnaie cotée en bourse : il varie au cours des années.

Crédit photo : www.pixels.com

1. Ce cours augmente de 10 % la première année puis augmente de 3 % la deuxième année. Quel est le taux d'évolution moyen annuel durant les deux premières années ?

2. Ce cours baisse ensuite de 18 % la troisième année et il augmente à nouveau de 5 % la quatrième année.

   a. Quelle est l'évolution globale pendant ces quatre ans ?

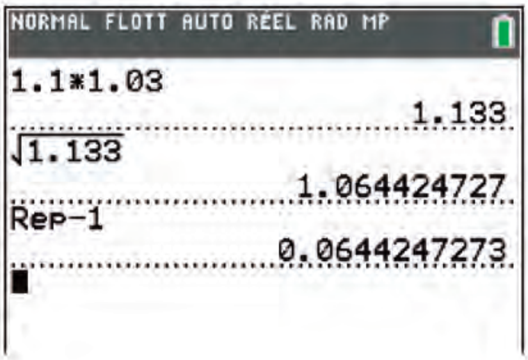
   b. Quel est le taux moyen annuel d'évolution du cours de cette crypto-monnaie pendant ces quatre ans ?

3. On souhaite que le rendement de cette crypto-monnaie soit de 7 % au bout de 5 ans. Quel est le taux d'évolution que ce cours doit-on avoir durant la cinquième année ?

1. Taux moyen sur 2 ans

Nous savons qu'une augmentation de 10% correspond à multiplier par un coefficient de 1,1 et qu'une augmentation de 3 % correspond à multiplier par un coefficient de 1,03. Le coefficient multiplicateur global pour les deux premières années est donc $CM_2 = 1{,}1 \times 1{,}03 = 1{,}133$. Le cours de la crypto-monnaie a ainsi globalement augmenté de $1{,}133 - 1 = 0{,}133 = 13{,}3$ % en 2 ans.

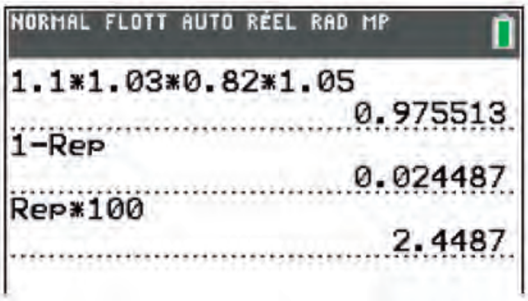
Si on appelle C le coefficient multiplicateur appliqué deux fois de suite pour cette même évolution on a $C \times C = C^2 = 1{,}133$ et puisque $C > 0$, on obtient $C = \sqrt{1{,}133} \approx 1{,}0644$ soit un taux annuel moyen d'augmentation d'environ $1{,}0644 - 1 = 0{,}0644 = 6{,}44$ %.



2.a. Evolution sur 4 ans

Tout d'abord, le coefficient multiplicateur pour une baisse de 18 % est égal à 0,82 et celui pour une augmentation de 5 % est égal à 1,05 donc le coefficient multiplicateur global pour les quatre années successives est égal à $CM_4 = 1{,}1 \times 1{,}03 \times 0{,}82 \times 1{,}05 = 0{,}975513$.

On en déduit que le cours de la crypto-monnaie a donc baissé de $1 - 0{,}975513 = 0{,}024487 = 2{,}4487$ % en 4 ans (malgré trois augmentations et une seule baisse, le cours de la crypto-monnaie a globalement baissé !).



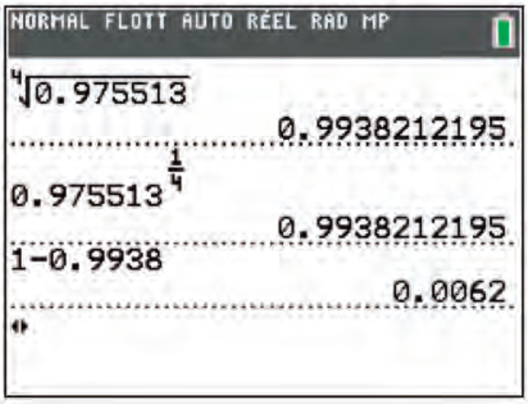
2.b. Taux moyen sur 4 ans

On cherche à présent le taux moyen annuel de baisse qui correspond à la même baisse globale. On cherche donc la valeur d'un coefficient multiplicateur unique positif C vérifiant $C \times C \times C \times C = C^4 = 0{,}975513$.

Or si a est un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2, l'unique réel strictement positif tel que $x^n = a$ est une racine nième de a, notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$. Ainsi $x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$.

L'équation $C^4 = 0{,}975513$ a donc pour solution $C = 0{,}975513^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}9938$.

On calcule cette valeur à l'aide des touches ^ de notre calculatrice.

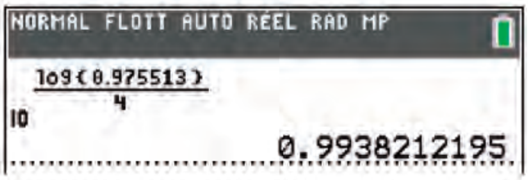


Le taux moyen annuel de baisse du cours de cette crypto-monnaie pendant ces quatre ans est donc d'environ $1 - 0{,}9938 = 0{,}0062 = 0{,}62\ \%$. Conclusion : cette crypto-monnaie a perdu pendant ces quatre ans en moyenne chaque année environ 0,62 % de sa valeur.

Remarque : pour résoudre l'équation $C^4 = 0{,}975513$, on pourrait aussi utiliser le logarithme décimal en procédant par équivalences soit $C^4 = 0{,}975513 \Leftrightarrow \log(C^4) = \log(0{,}975513) \Leftrightarrow 4 \times \log(C) = \log(0{,}975513)$ puis

$$4 \times \log(C) = \log(0{,}975513) \Leftrightarrow \log(C) = \frac{\log(0{,}975513)}{4} \Leftrightarrow C = 10^{\frac{\log(0{,}975513)}{4}}.$$

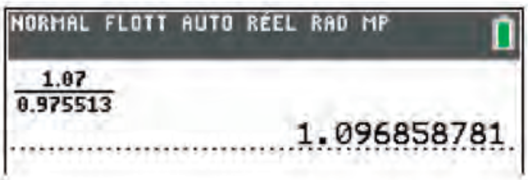
On vérifie ce calcul avec notre calculatrice à l'aide des touches 2nde log.



3. Rendement de 7 % sur 5 ans

Pour obtenir un rendement de 7 % au terme des 5 années, on cherche un taux d'évolution lors de la cinquième année tel que le coefficient multiplicateur C_5 correspondant vérifie $CM_4 \times C_5 = 1{,}07$.

On obtient alors $C_5 = \frac{1{,}07}{CM_4} = \frac{1{,}07}{0{,}975513} \approx 1{,}0969$ (touche de la calculatrice) soit une augmentation du cours de la crypto-monnaie d'environ 9,69 % lors de la cinquième année.



Nombre de mensualités et Solveur financier

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Kindel Media

Raphaël, âgé de 15 ans au 1er janvier 2022, réside dans une commune du Sud de la France. Il aura besoin de 1 500 € pour financer son permis de conduire.

Afin d'anticiper le financement de ce permis, Raphaël décide de placer ses 600 € d'économie à partir du 1er janvier 2022 sur un livret jeune rémunéré au taux annuel de 2,75%.

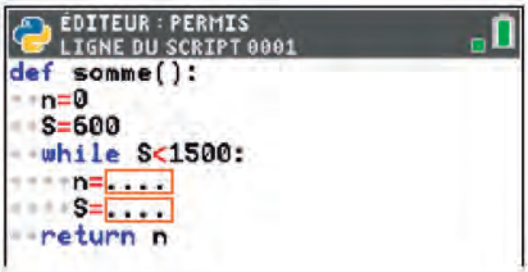
1. Disposera-t-il d'une somme suffisante au 1er janvier 2025 pour passer son permis ?

2. Calculer le taux mensuel moyen qui correspond au taux annuel de 2,75% (arrondir à 10^{-3} près).

3. Les parents de Raphaël lui conseillent de verser chaque mois sur le livret la somme supplémentaire de 25 € à partir du 1er février 2022.

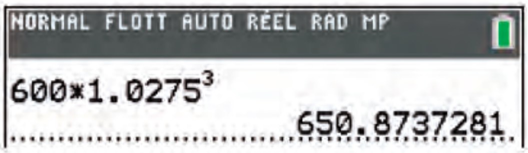
   a. Compléter la fonction **`somme`** du script Python `PERMIS` ci-contre qui renvoie le plus petit nombre de mois nécessaires pour que Raphaël dispose d'au moins 1 500 € sur son livret. Exécuter ce script et interpréter le résultat.

   b. Retrouver le résultat précédent en utilisant les fonctions financières de la calculatrice.



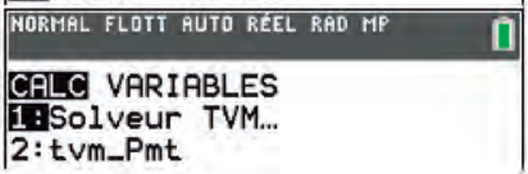
1. Somme acquise en 3 ans

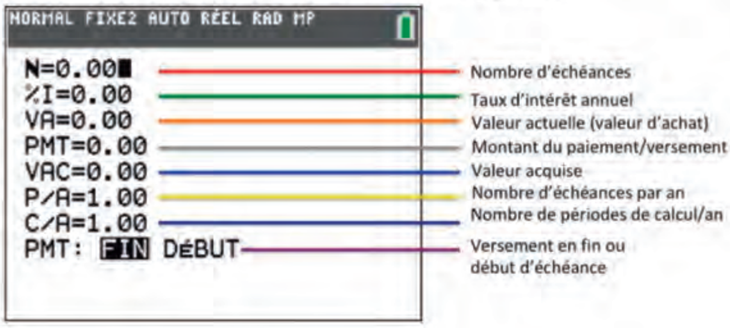
Chaque année, la somme placée augmente de 2,75 % ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1+\frac{2,75}{100}=1,0275$.



Ainsi Raphaël disposera au 1er janvier 2025 d'une somme acquise de $600\times 1,0275^3\approx 650,87$ € qui n'est pas suffisante pour financer son permis.

On peut aussi utiliser l'application des fonctions financières de la calculatrice à l'aide des touches 2nde résol (apps) choix `1:Fonct financ…` puis à nouveau choix `1:Solveur TVM…` littéralement « Time Value Money » autrement dit la valeur de l'argent dans le temps.





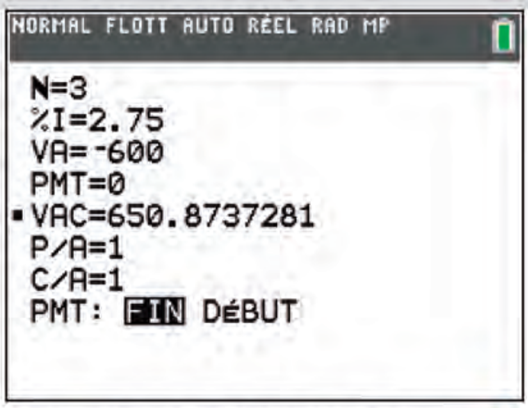
Ce solveur nous permet de déterminer toutes les composantes qui concernent la valeur de l'argent dans le temps.

Thème : Analyse

Nombre de mensualités et Solveur financier

TI-82 Advanced Edition Python

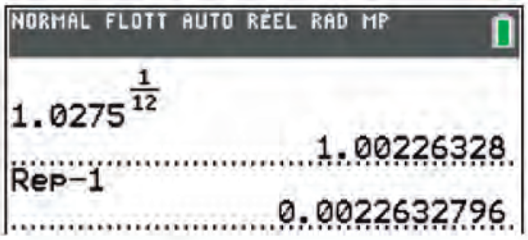
TI-83 Premium CE Edition Python



Nous complétons alors toutes les rubriques dont nous avons la connaissance puis nous plaçons le curseur devant la grandeur que nous cherchons et nous appuyons sur la touche [résol].

Par exemple ici nous trouvons la valeur acquise **VAC** en complétant **N=3**, **%I=2.75** et **VA=-600**. La valeur actuelle est négative car il s'agit d'un placement financier.

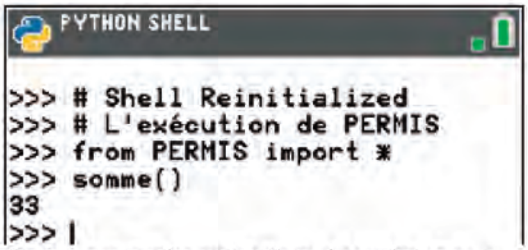
2. Taux mensuel moyen



Soit t le taux mensuel moyen qui correspond au taux annuel de 2,75 %, ce taux vérifie l'équation $(1+t)^{12} = 1{,}0275$ puisqu'une année comporte 12 mois soit $1 + t = 1{,}0275^{\frac{1}{12}}$ et donc $t \approx 0{,}00226 \approx 0{,}226\,\%$ à 10^{-3} près.

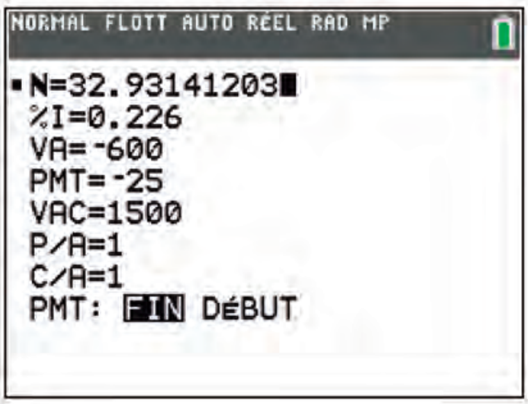
3.a. Nombre de mensualités

Chaque mois, le capital augmente de 0,226 % et on ajoute 25 € donc à chaque itération l'entier n augmente d'une unité et l'accumulateur somme vérifie l'égalité **S=1.00226*S+25**.



On trouve après exécution du script que **n = 33** donc Raphaël disposera, au bout de 33 mois, d'une somme suffisante pour passer son permis de conduire : cela correspond au 1er octobre 2024.

3.b. Solveur TVM



Utilisons à nouveau le **solveur TVM** avec comme informations connues ici **%I=0.226** , **VA=-600** , **PMT=-25** et **VAC=1500**. Nous laissons le versement de 25 € en fin de chaque mois sur la dernière ligne puisque cela commence au 2ème mois.

Nous plaçons alors le curseur devant la grandeur **N** que nous cherchons et grâce à la touche [résol], nous trouvons que **N≈32.93** pour avoir une somme de 1 500 € soit à nouveau à partir de 33 mois.

Coût unitaire et fonction inverse

Enoncé

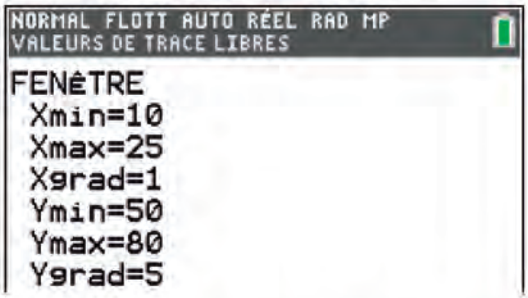
Crédit photo : www.pexels.com – Andrea Piacquadio

Une entreprise artisanale fabrique des masques vénitiens : elle peut en produire au maximum 25 par jour. Le coût total de production journalier (en euros) dépend du nombre x de masques fabriqués : il est donné à l'aide de la fonction C_T définie sur $[0\,;25]$ par $C_T(x) = x^2 + 30x + 400$.

Le coût de production d'un masque, appelé coût unitaire moyen, est donné par la fonction $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$. Cette fonction n'est plus définie en zéro car même s'il est possible de ne rien produire, cela n'a pas de sens de calculer un coût unitaire sur une production nulle.

1. Quels sont les coûts fixes quotidiens ? Quel est le coût unitaire moyen si la production journalière est de 10 masques vénitiens ?

2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de la fonction C_M sur $[10\,;25]$ en prenant les valeurs ci-contre pour la fenêtre d'affichage.



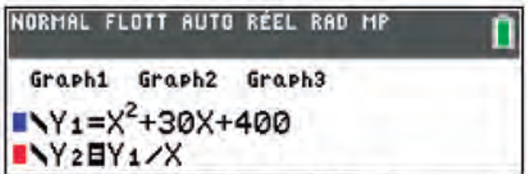
3. a. Calculer l'expression de la dérivée $C'_M(x)$ pour tout $x \in \,]0\,;25]$.

   b. Etudier le signe de $C'_M(x)$, dresser le tableau de variations de la fonction C_M et donner à l'entreprise le résultat de cette étude.

1. Coût unitaire

Les coûts fixes quotidiens sont calculés à l'aide de la fonction coût total lorsque $x = 0$. On trouve $C_T(0) = 400$ donc ils s'élèvent à 40 €.

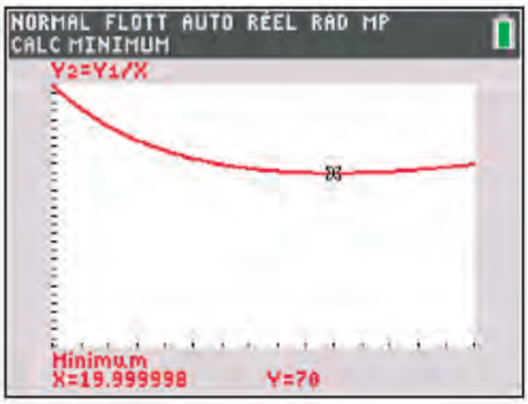
Afin de nous aider à calculer le coût unitaire moyen nous allons entrer les fonctions dans la calculatrice. A l'aide du menu f(x) on saisit l'expression de $C_T(x)$ dans Y_1 puis celle de $C_M(x)$ dans Y_2. Dans la page de calculs on appuie sur les touches alpha trace (calculs f4) choix 2:Y_2 afin d'obtenir que $C_M(10) = 80$.



Si l'entreprise fabrique dix masques vénitiens, la fabrication de chaque masque coûte 80 € en moyenne.

2. Conjecture graphique

Après avoir configuré la fenêtre d'affichage grâce à la touche fenêtre on trace la fonction C_M avec graphe en désélectionnant la fonction Y_1 du tracé.



Nous observons alors que la fonction semble être décroissante puis croissante, recherchons alors les coordonnées de son extremum local. On commence par se rendre dans le menu `calculs`, à l'aide des touches 2nde trace (calculs f4) puis on sélectionne la commande `3:minimum`. Une fois dans la fenêtre graphique, on place le curseur à gauche du minimum et on appuie sur entrer . De même, on place le curseur à droite du minimum et enfin près du minimum et on valide à chaque fois par entrer . On lit alors $x \approx 20$ car la valeur approchée obtenue dépendra de la valeur initiale choisie et les coordonnées de l'extremum local sont donc $(20\,;70)$.

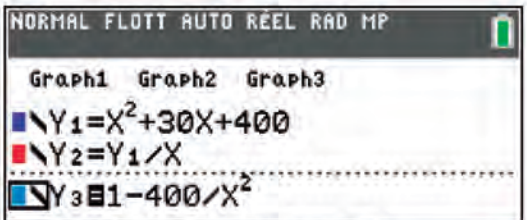
3.a. Fonction dérivée

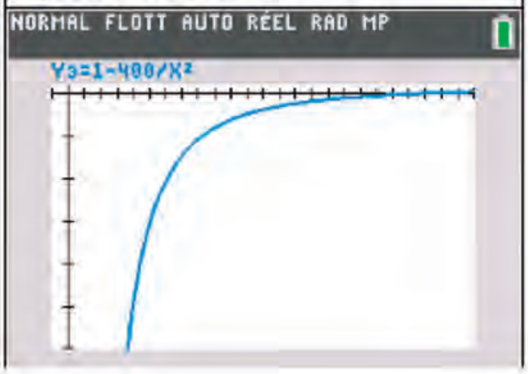
On peut écrire $C_M(x) = \frac{x^2+30x+400}{x} = x + 30 + \frac{400}{x}$, on reconnaît alors la combinaison linéaire d'une fonction affine et de la fonction inverse.

Ainsi $C_M'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$ pour tout $x \in]0\,;25]$.

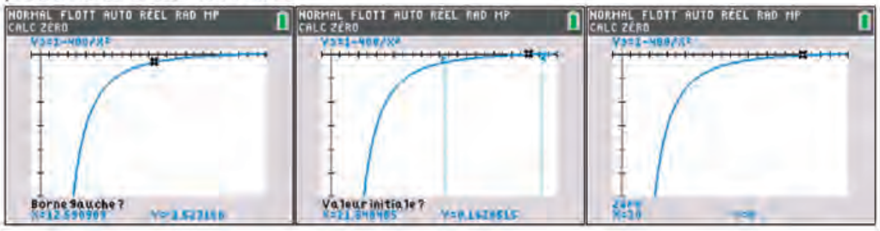
3.b. Tableau de variations

Pour étudier le signe de $C_M'(x)$ on peut s'aider de la calculatrice. En effet, saisissons la fonction $C_M'(x)$ dans Y₃, en plaçant le curseur sur le rectangle de couleur et en appuyant sur [entrer], il est possible de modifier la couleur et le style du tracé.





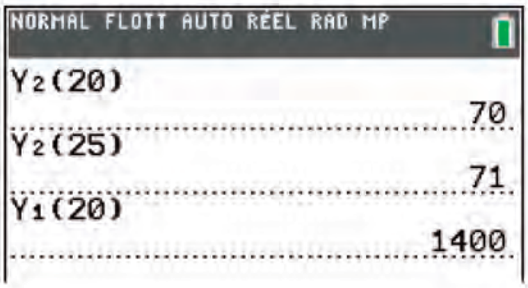
On observe difficilement un changement de signe de la fonction dérivée, on va donc chercher si cette fonction s'annule. Pour cela on reprend le menu `calculs`, à l'aide des touches [2nde] [trace] puis on sélectionne la commande `2:racine`. On suit la même méthode que pour la recherche d'un extremum local : on se place à gauche de la racine, puis à droite et enfin proche de cette dernière.



On lit alors $x = 20$ donc $C_M'(x) \leq 0$ sur $]0\,;20]$ et $C_M'(x) \geq 0$ sur $[20\,;25]$.

On peut aussi étudier le signe de $C_M'(x)$ par calcul en factorisant son expression algébrique : $C_M'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2-400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$. Ainsi $C_M'(x)$ est du signe de $(x-20)$ sur $]0\,;25]$ et on retrouve les résultats précédents. On en déduit le tableau de variations de la fonction C_M sur $]0\,;25]$:

x	0		20		25
$C_M'(x)$		−	0	+	
$C_M(x)$		↘	70	↗	71



On peut donc en conclure que le coût unitaire minimal est égal à 70 €, il est atteint pour une production optimale de 20 masques vénitiens par jour. Dans ce cas l'entreprise a un coût total de production égal à 1 400 €.

Coût total, coût marginal et bénéfice

Enoncé

Une usine française assure la fabrication chaque semaine d'une quantité q en tonnes de produits chimiques. Elle produit entre 10 et 100 tonnes par semaine. Le coût total de q tonnes est donné par la fonction C définie sur $[10\,;100]$ par $C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$. La fonction C_M représentant le coût moyen unitaire est définie par $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$: c'est le coût moyen d'une tonne de produit lorsque q tonnes sont produites.

Crédit photo : www.pexels.com – Pixabay

1. a. Montrer que $C_M'(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction C_M. Quel est le coût moyen unitaire minimal ?

2. Le coût marginal C_m est défini comme étant le supplément de coût engendré par la production d'une tonne de produit supplémentaire, soit $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.

   a. Calculer $C_m(q)$ et interpréter le résultat. Exprimer $C_m(q)$ en fonction de q pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

   b. Déterminer $C'(q)$. Quelle est la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$?

3. On souhaite comparer le coût marginal et le coût unitaire moyen. Représenter ces 2 fonctions dans un même repère et étudier leur point d'intersection. Conclure.

4. Le cours du marché offre un prix de 310 € par tonne fabriquée. Pour tout $q \in [10\,;100]$, on note $R(q)$ la recette et $B(q)$ le bénéfice générés par la production et la vente de q tonnes de produits chimiques par l'usine.

   a. Exprimer $R(q)$ et $B(q)$ en fonction de q.

   b. Quel est le nombre de tonnes de produits chimiques à produire par l'usine pour réaliser un bénéfice maximal ?

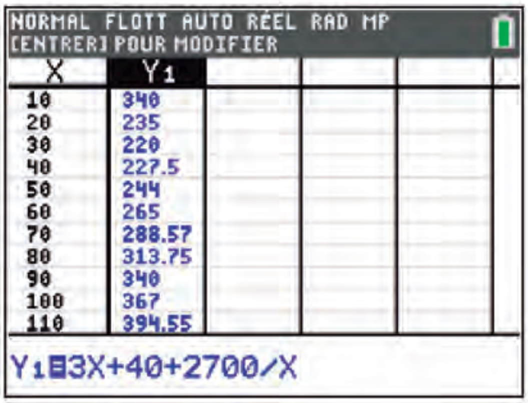
1.a. Dérivée du coût moyen unitaire

On a $C_M(q) = \frac{3q^2+40q+2700}{q} = 3q + 40 + \frac{2700}{q}$ avec $10 \leq q \leq 100$. Donc $C_M'(q) = 3 - \frac{2700}{q^2} = \frac{3q^2-2700}{q^2} = \frac{3(q^2-900)}{q^2} = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$ pour $10 \leq q \leq 100$.

1.b. Coût moyen unitaire minimal

On en déduit que $C_M'(q)$ est du signe de $(q-30)$ sur $[10\,;100]$ puis le tableau de variations de la fonction C_M sur $[10\,;100]$:

q	10		30		100
$C_M'(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	340	$\searrow$	220	$\nearrow$	367



Le coût moyen unitaire minimal est égal à 220 €, il est obtenu pour une production de 30 tonnes de produits chimiques.

2.a. Coût marginal

Tout d'abord $C_m(20) = C(21) - C(20) = 4\,863 - 4\,700 = 163$, cela signifie que la 21ème tonne produite coûtera 163 € !

D'autre part $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ avec $C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$ soit $C_m(q) = 6q + 43$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$.

2.b. Dérivée du coût total

On a $C'(q) = 6q + 40$, rajoutons alors dans le menu fonction f(x) de la calculatrice, la fonction C_m en **Y₂** et la fonction C en **Y₃**.

On calcule alors la différence $C_m(q) - C'(q) = 6q + 43 - (6q + 40) = 3$ pour tout réel $q \in [10\,;100]$. Il y a une différence de seulement 3 € entre le coût marginal et la dérivée du coût total : *en pratique, on assimile le coût marginal de production à la dérivée du coût total.*

On vérifie ce résultat sur l'écran de calculs en utilisant le nombre dérivé d'une fonction accessible dans le menu math choix `8:nbreDérivé` puis on complète tous les champs manquants : les fonctions **Y₂** et **Y₃** sont accessibles avec la touche var puis onglet **VAR Y** choix `1:Fonction`.

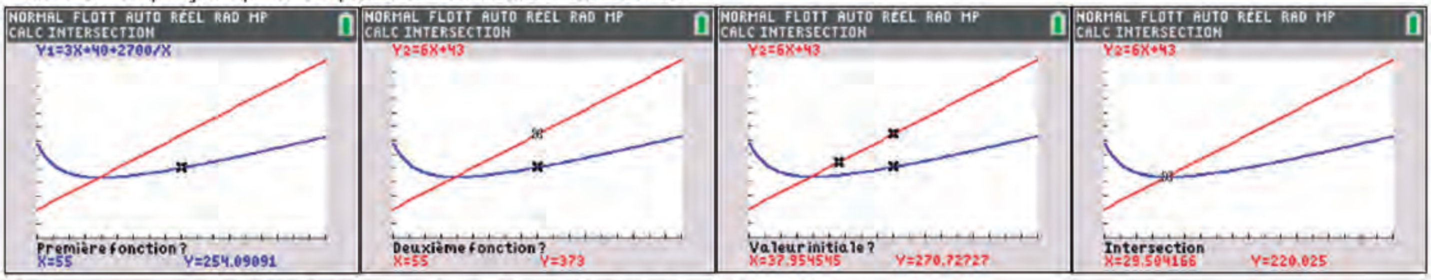
```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 Graph1  Graph2  Graph3
\Y1=3X+40+2700/X
\Y2=6X+43
\Y3=3X²+40X+2700
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
Y2(20)-d/dX(Y3)|X=20
                          3
```

3. Comparaison de fonctions

Après avoir représenté ces 2 fonctions dans un même repère, on sélectionne la commande `5:intersection` dans le menu 2nde trace (calculs f4).

De retour au graphique, on valide le choix de Y_1, celui de Y_2 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché.



On trouve $q \approx 29{,}5$ c'est-à-dire que le coût marginal et le coût unitaire se coupent très proche de la valeur minimisant le coût moyen unitaire.

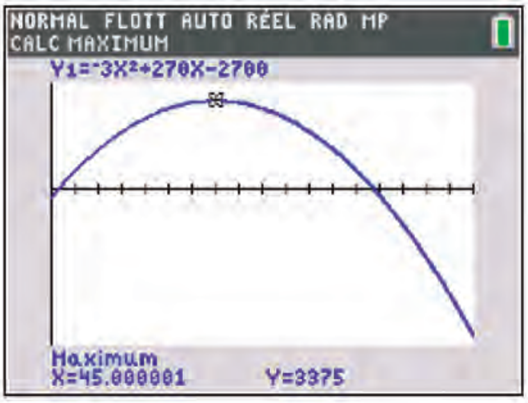
4.a. Recette et bénéfice

On a $R(q) = 310q$ et $B(q) = R(q) - C(q) = 310q - (3q^2 + 40q + 2700)$ soit $B(q) = -3q^2 + 270q - 2700$ pour tout $q \in [10\,;100]$.

4.b. Bénéfice maximal

La fonction B est un polynôme du second degré dont l'abscisse du sommet S de la parabole est donné par la formule $-\frac{b}{2a}$. Ici on a $x_S = -\frac{270}{2\times(-3)} = 45$.

De plus, $y_S = B(45) = 3375$. L'usine réalise donc un bénéfice maximal hebdomadaire de 3 375 € pour une production optimale de 45 tonnes de produits chimiques. Avec la calculatrice, on sélectionne la commande `4:maximum` dans le menu `calculs`, obtenu à l'aide des touches 2nde trace (calculs f4).



Fabrication d'une boîte à coût minimal

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Monstera

Une entreprise souhaite fabriquer une boîte de 256 cm³ de volume de la forme d'un pavé droit à base carrée.

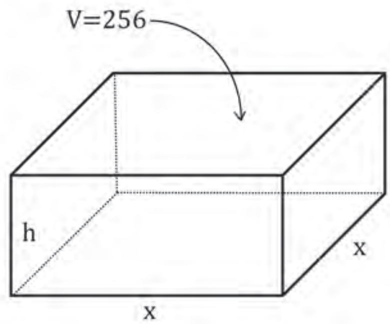
Le fond et le couvercle lui reviennent à 2 centimes d'euro le cm² et les faces latérales à 4 centimes d'euro le cm². On note x la longueur en cm du côté de la base et h la hauteur en cm de la boîte.

1. Exprimer h en fonction de x et montrer que le prix de revient de la boîte, en centimes d'euro, est : $p(x) = 4x^2 + \frac{4096}{x}$.

2. Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{p}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. On utilisera le sens de variation de la fonction cube $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. Donner les dimensions de la boîte pour que le prix de revient soit minimal. Un client achète 50 boîtes à l'entreprise à 10 € l'unité. Quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise ?

1. Prix de revient



Sachant que le volume de la boîte est $V = 256\,cm^3$ mais aussi que $V = L \times l \times h$ avec dans notre cas $L = l = x$ nous obtenons l'égalité $256 = x \times x \times h$ soit :

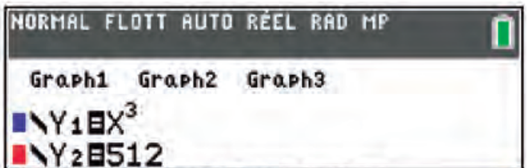
$$h = \frac{256}{x^2}.$$

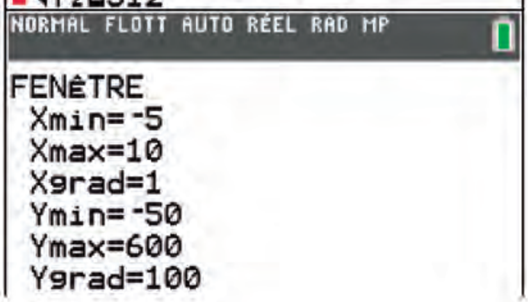
Pour exprimer le prix de revient de la boîte, nous devons calculer les aires en cm² de chaque face du pavé droit. Le fond et le couvercle sont des carrés de côté x donc leur aire est égale à x^2. Les quatre faces latérales sont des rectangles de dimensions x et h, leur aire est donc égale à $x \times h = x \times \frac{256}{x^2} = \frac{256}{x}$.

Ainsi le prix de revient, en centimes d'euro, est égal à :

$$p(x) = 2 \times 2 \times x^2 + 4 \times 4 \times \frac{256}{x} = 4x^2 + \frac{4096}{x}.$$

2. Etude de variations





Nous calculons d'abord la dérivée $\boldsymbol{p}'$ de la fonction $\boldsymbol{p}$ en remarquant que $\boldsymbol{p}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ en tant que combinaison linéaire d'une fonction polynomiale de degré 2 et de la fonction inverse.

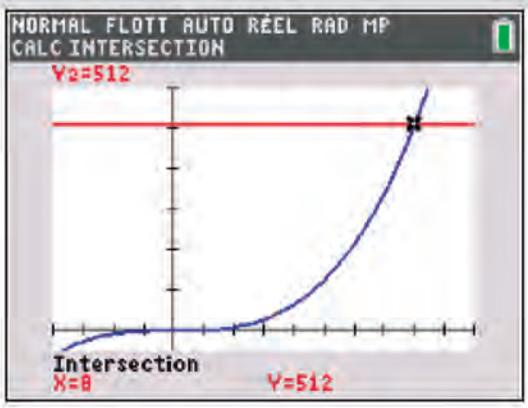
D'où $p'(x) = 8x + 4096 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{8x^3 - 4096}{x^2}$ soit $p'(x) = \frac{8(x^3-512)}{x^2}$.

Ainsi $p'(x)$ est du signe de $x^3 - 512$ sur $]0\,;\,+\infty[$: c'est ici que l'on utilise le sens de variation de la fonction cube $x \mapsto x^3$: on sait que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on résout alors l'équation $x^3 - 512 = 0$.

Deux possibilités, par méthode graphique en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice.

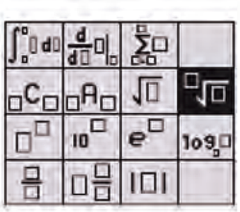
Fabrication d'une boîte à coût minimal

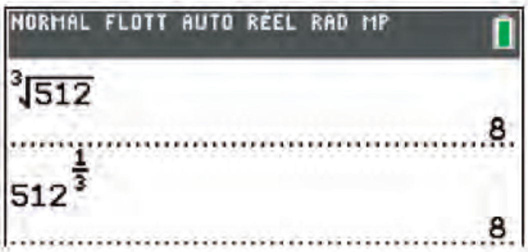
Nous entrons la fonction x^3 dans **Y₁** et la fonction constante égale à 512 dans **Y₂**. On représente alors ces deux fonctions avec [graphe] après avoir configuré la fenêtre d'affichage. Puis on choisit le menu `calculs`, à l'aide des touches [2nde] [trace] et on sélectionne la commande `5:intersection`. De retour au graphique, on valide avec [entrer] le choix de Y_1, celui de Y_2 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché. On trouve $x = 8$, c'est l'unique solution de l'équation $x^3 = 512$.



Deuxième méthode, par calcul, pour résoudre $x^3 = 512$ on utilise la racine cubique $x = \sqrt[3]{512} = 512^{\frac{1}{3}} = 8$.

On calcule cette valeur à l'aide des touches [2nde] [$\frac{\square}{\square}$]



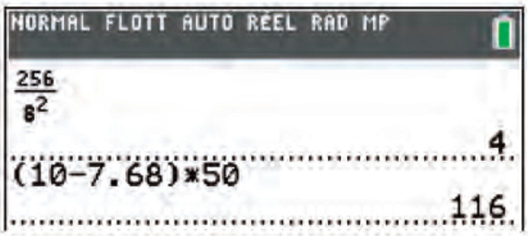


On obtient ainsi que $p'(x) \leq 0$ sur $]0\,;8]$ et $p'(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ d'où le tableau de variations :

x	0		8		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$\searrow$	768	$\nearrow$	

3. Coût minimal

D'après l'étude précédente, la fonction prix de revient $\boldsymbol{p}$ admet un minimum lorsque $x = 8$. Donc pour fabriquer une boîte de volume 256 cm³, celle qui revient la moins chère à l'entreprise avec cette forme, est obtenue avec une base carrée de côté 8 cm. Quant à la hauteur de cette boîte, elle est égale à $h = \frac{256}{8^2}$ soit à 4 cm.



Enfin, l'entreprise revend ces boîtes ainsi fabriquées à 10 € l'unité.

Or, nous savons d'après la précédente question que le coût unitaire minimal est de 768 centimes d'euros soit 7,68 €.

Si un client achète 50 boîtes de ce type, le bénéfice réalisé par l'entreprise est égal à (10–7,68) x 50 = 116 €.

Thème: Statistiques

Méthode des moindres carrés

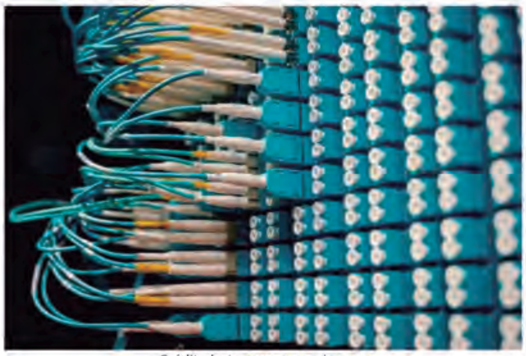
TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnements à très haut débit en France du premier semestre 2019 au dernier semestre 2020.

Trimestre	T1 2019	T2 2019	T3 2019	T4 2019	T1 2020	T2 2020	T3 2020	T4 2020
Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Abonnements y_i (en millions)	9,5	10,1	10,6	11,4	12	12,6	13,6	14,7



Crédit photo : www.pexels.com

1. Représenter graphiquement le nuage de points $M(x_i, y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal. On prendra pour unités : 2 cm par trimestre et 2 cm par million d'abonnements (on pourra commencer la graduation de l'axe des ordonnées à 9 millions).

2. À l'aide de la calculatrice, donner, pour cette série statistique, une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
On arrondira les coefficients au millième.

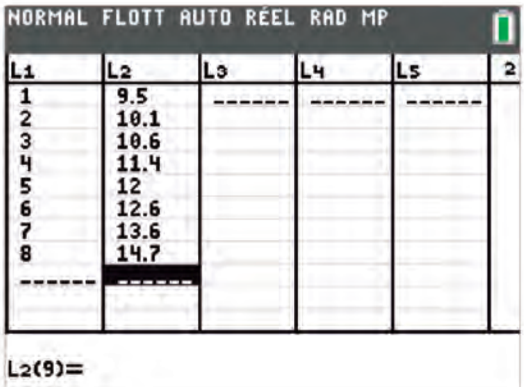
3. On décide de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements y en fonction du rang x du trimestre par l'expression : $y = 0{,}72x + 8{,}57$.

Sur la base de ce modèle, déterminer par un calcul le nombre d'abonnements prévu au quatrième trimestre de l'année 2021.

1. Nuage de points

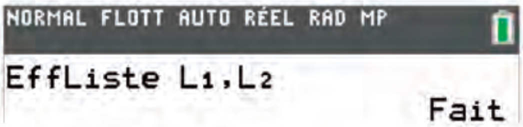
Pour entrer les données dans les listes de la calculatrice, on appuie sur stats **Modifier…**

On entre les rangs du trimestre dans la liste L_1 (cela représente les valeurs x_i) et le nombre d'abonnements (en millions) dans la liste L_2 (cela représente les valeurs y_i).



Remarque : Pour effacer des données déjà présentes :

Appuyer sur stats **EffListe** puis choisir le nom des listes à effacer en les séparant par une virgule (touche , au dessus de la touche 7). Par exemple pour effacer le contenu des listes L_1 et L_2 on entre



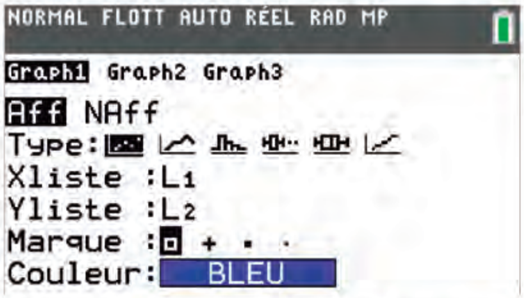
Méthode des moindres carrés

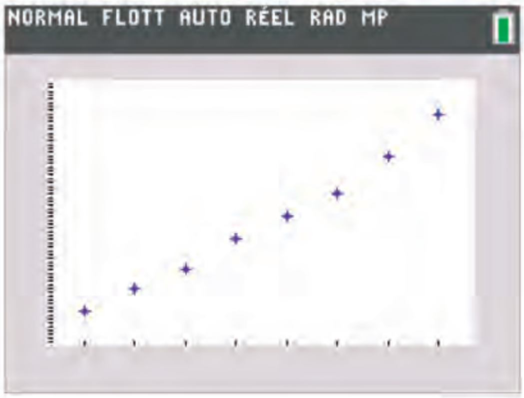
Pour représenter graphiquement ces deux listes, on paramètre la fenêtre graphique en appuyant sur [2nde] [f(x)] (`graph stats`).

Sélectionnons le premier graphique (on peut en faire 3 en tout sur une même fenêtre) :

- On choisit **Aff** (en appuyant sur **ENTRER**) pour afficher ce graphique.
- Le type de graphique est nuage de points :
- Les valeurs des abscisses sont dans L_1 et les valeurs de ordonnées dans L_2.
- Afin d'ajuster au mieux la fenêtre, appuyer sur [zoom] [9].

Remarque : Pensez à bien effacer les éventuelles expressions des fonctions pour ne pas avoir un affichage « parasite ».





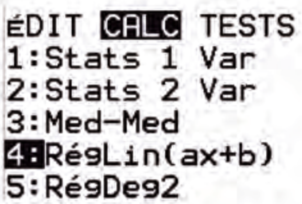
2. Droite d'ajustement

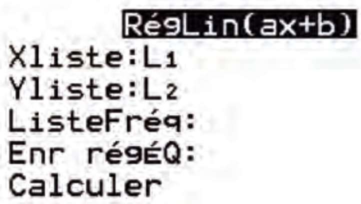
Pour afficher l'équation de la droite de régression, on appuie sur [stats] et dans l'onglet **CALC** on sélectionne **4 :RégLin(ax+b)** :

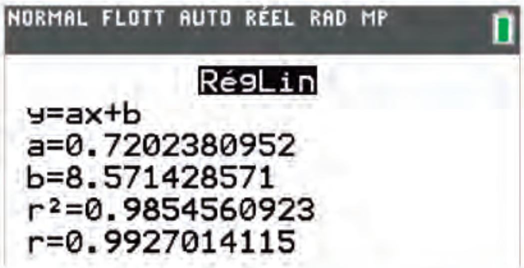
Xliste doit contenir la liste des abscisses : L_1 (appuyer sur [2nde] [1])

Yliste doit contenir la liste des ordonnées : L_2 (appuyer sur [2nde] [2]).

On termine en sélectionnant **Calculer** et en appuyant sur **ENTRER**.

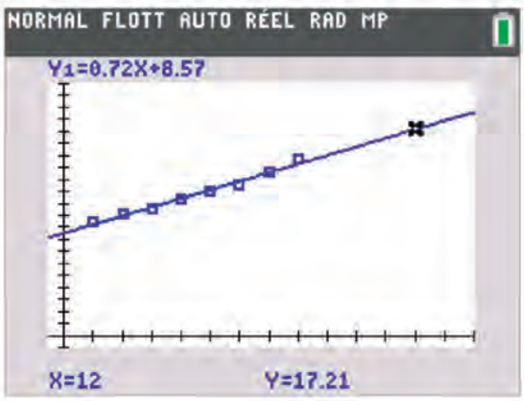






On trouve comme équation : $y = 0{,}720x + 8{,}571$.

Remarque : Pour associer des effectifs ou des fréquences aux y_i il faudra les entrer dans une troisième liste (par exemple L_3) et écrire dans **ListeFréq** : L_3.



3. Prévision

Sur la base du modèle, le nombre d'abonnements prévu au quatrième trimestre de l'année 2021, c'est-à-dire au trimestre de rang 12, est :

$y = 0{,}72 \times 12 + 8{,}57 = 17{,}21$ soit 17,21 millions d'abonnés.

On peut afficher la droite en entrant son expression dans [f(x)] puis sur [graphe] pour l'afficher. Pour déterminer graphiquement la valeur de y lorsque $x = 12$, appuyer sur [trace] puis entrer 12 et valider.

Thème: Statistiques

Ajustement non linéaire

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Suite à un incident nucléaire, des traces de contamination ont été découvertes. Le tableau ci-dessous donne les résultats fournis, heure par heure, par un appareil de mesure de la radioactivité. Les nombres entiers N_i représentent le nombre de particules recueillies par l'appareil en une seconde.

t_i en heure	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9
$z_i = \log(N_i)$							

On pose $z_i = \log(N_i)$ pour i entier variant de 0 à 6.

1. Compléter le tableau ci-dessus donnant les valeurs de z_i arrondies au centième.

2. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (t_i, z_i).

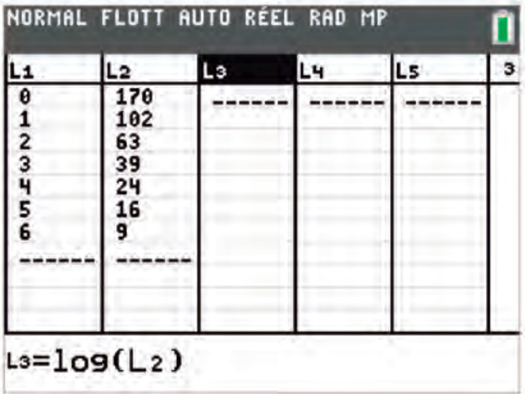
3. Donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t (arrondir les coefficients à 10^{-3} près) et représenter graphiquement la droite de régression.
Dans la suite, on prendra pour équation de la droite de régression linéaire : $z = -0{,}21t + 2{,}2$.

4. En déduire une expression de N en fonction de t.

5. Lorsque le nombre de particules recueillies est inférieur ou égal à 3, le voyant vert d'un appareil s'allume. Déterminer, par le calcul, le nombre d'heures nécessaires pour voir le voyant vert s'allumer.

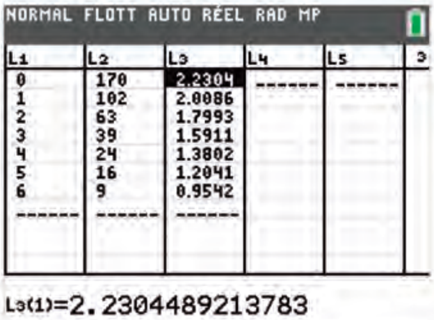
1. Compléter un tableau

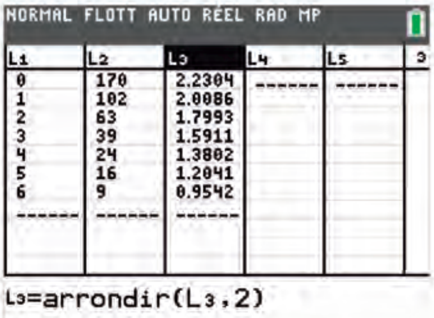
Pour entrer les données dans les listes de la calculatrice, on appuie sur stats **Modifier…**
On entre les valeurs t_i dans la liste L_1 et les valeurs de N_i dans la liste L_2.

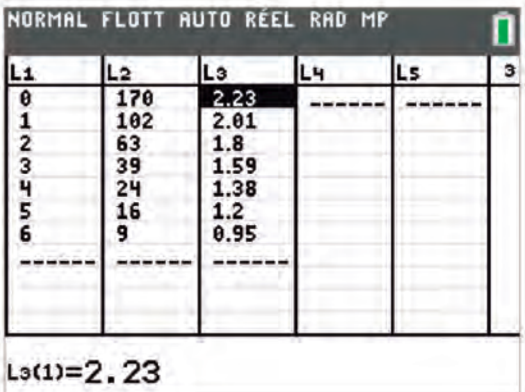


Pour calculer automatiquement toutes les valeurs $z_i = \log(N_i)$ on place le curseur sur le nom de la liste L_3 et on entre **log(L₂)** et on appuie sur entrer.

Pour obtenir les valeurs avec 2 décimales de précision on se place à nouveau le curseur sur L_3 et dans **MATHS** onglet **NBRE**, choisir **arrondir** et écrire **arrondir(L₃,2)** pour obtenir deux décimales de précision.





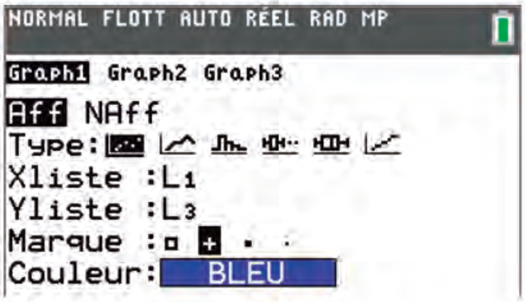


Ajustement non linéaire

2. Nuage de points (t_i, z_i)

Pour représenter graphiquement ce nuage de points, on définit le graphique en appuyant sur [2nde] [f(x)]. On fera bien attention d'indiquer que les valeurs des abscisses sont dans L_1 et les valeurs de ordonnées dans L_3.

Pensez à ajuster la fenêtre automatiquement en appuyant sur [zoom].



3. Droite d'ajustement

Pour afficher l'équation de la droite de régression, on appuie sur [stats] et dans l'onglet `CALC` on sélectionne `4 :RégLin(ax+b)` :

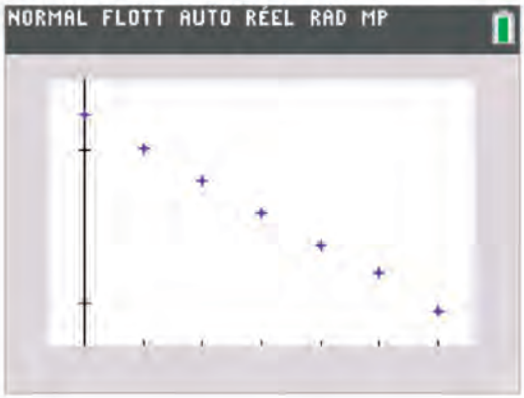
`Xliste` doit contenir la liste des abscisses : L_1 (appuyer sur [2nde] [1]).

`Yliste` doit contenir la liste des ordonnées : L_3 (appuyer sur [2nde] [3]).

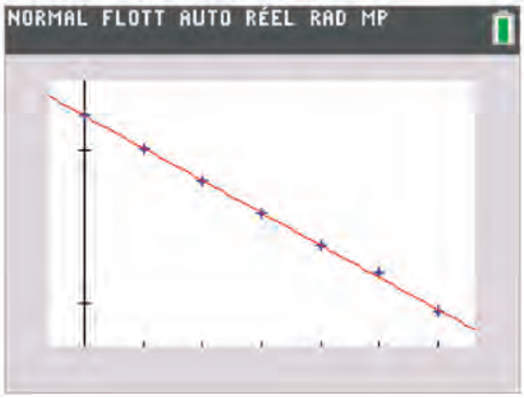
Afin d'afficher graphiquement la droite de régression il faut enregistrer l'expression dans Y_1. Pour cela, dans `Enr régéQ` on entre Y_1 (accessible dans [var] onglet `VAR Y` et `Fonction`, puis choisir Y_1) et on termine en sélectionnant `Calculer` et en appuyant sur [entrer].

```
RégLin(ax+b)
Xliste:L1
Yliste:L3
ListeFréq:
Enr régÉQ:Y1
Calculer
```

```
RégLin
y=ax+b
a=-0.21
b=2.224285714
r²=0.9992139092
r=-0.9996068773
```



On trouve comme équation : $z = -0{,}21t + 2{,}224$ Pour afficher le graphique on appuie sur [graphe].



4. Exprimer N en fonction de t

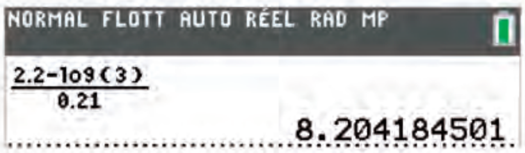
On a vu que $z = -0{,}21t + 2{,}2$ or $z = \log(N)$ cela nous donne $\log(N) = -0{,}21t + 2{,}2$ et donc $N = 10^{-0{,}21t+2{,}2}$.

5. Moment où le voyant vert s'allume.

Le voyant vert s'allume lorsque $N \leq 3$ soit avec le modèle $10^{-0{,}21t+2{,}2} \leq 3$

d'où $-0{,}21t + 2{,}2 \leq \log(3)$ et donc $t \geq \frac{2{,}2-\log(3)}{0{,}21}$

On trouve $\frac{2{,}2-\log(3)}{0{,}21} \approx 8{,}2$. Ainsi à partir de la 9ème heure le voyant vers s'allumera.



Thème: Statistiques

Automatiser le calcul de somme $\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

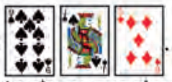
Enoncé

Au poker Texas hold'em le joueur dispose de deux cartes dans sa main. Dans un premier temps, le croupier découvre 3 cartes (le flop). Puis le croupier découvrira une 4ème carte (le turn) et une dernière (la rivière). Le joueur essaye de former le meilleur jeu entre ses deux cartes et celles découvertes par le croupier.

Crédit photo : www.pexels.com – Markus Spiske

Dans cet exercice on se place après le flop (trois cartes ont été découvertes). Si on note X le nombre de cartes favorables au joueur (qui ne sont pas encore découvertes et dans le paquet du croupier), le but de cette activité est de trouver une valeur approchée simple de $p(X = n)$.

On admet que $p(X = n) = 1 - \frac{\binom{47-n}{2}}{\binom{47}{2}}$.

1°) Le joueur a en main : .Il tombe au flop : .

Pour obtenir la couleur à pique, le joueur doit obtenir au moins 1 pique parmi les 9 piques restants dans le paquet ce qui correspond à la probabilité $p(X = 9)$. Calculer cette probabilité puis compléter le tableau ci-dessous.

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$										
pourcentage y_i										

On arrondira les probabilités au millième et les pourcentages au dixième.

2°) Représenter graphiquement le nuage de points $M(x_i, y_i)$.

3°) Rechercher une droite d'équation $y = ax + b$ avec a et b des **entiers**, approximant au mieux le nuage de points.

4°) Afin de déterminer la qualité de l'approximation du nuage par la droite de la question 4. On va calculer l'erreur commise e définie comme suit :

$$e = \sum_{i=1}^{11} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

Calculer l'erreur commise avec les valeurs de a et b trouvées dans la question 4.

1. Tableau de probabilités

Calculons $p(X = 9) = 1 - \frac{\binom{47-9}{2}}{\binom{47}{2}} = 1 - \frac{\binom{38}{2}}{\binom{47}{2}}$. Les combinaisons sont accessibles dans math onglet **PROB** puis **Combinaison**.

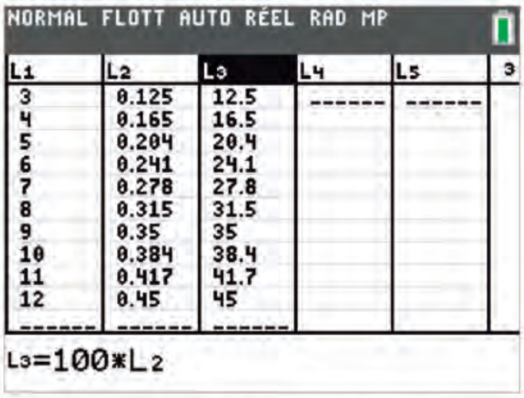
On peut utiliser les listes pour automatiser le calcul de l'ensemble du tableau : On accède aux listes en appuyant sur stats **Modifier**.

On entre dans L_1 les valeurs de x_i, c'est-à-dire les entiers de 3 à 12.

Automatiser le calcul de somme $(y_i - (ax_i + b))^2$

Et on entre dans L_2 les probabilités correspondantes en utilisant la formule $L_2=1-\frac{_{47-L_1}C_2}{_{47}C_2}$, on peut aussi utiliser $L_2=$**arrondir**$\left(1-\frac{_{L_1}C_2}{_{47}C_2},2\right)$ (**arrondir** se situe dans math NBRE).

Pour obtenir l'écriture en pourcentage correspondant aux probabilités il suffit de multiplier les valeurs de la liste L_2 par 100. On écrira tout en haut de la liste L_3 la formule suivante : **100*L₂**.



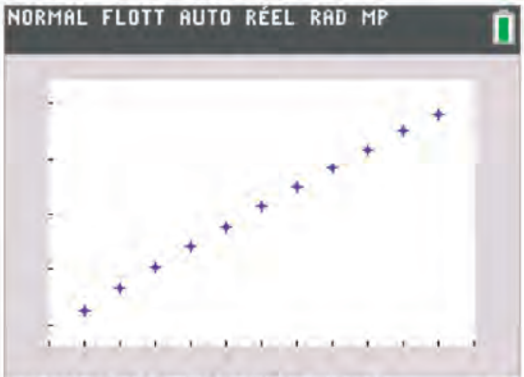
x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	0,125	0,165	0,204	0,241	0,278	0,315	0,35	0,384	0,417	0,45
pourcentage y_i	12,5	16,5	20,4	24,1	27,8	31,5	35	38,4	41,7	45

2. Nuage de points

Pour représenter graphiquement ces deux listes, on paramètre la fenêtre graphique en appuyant sur 2nde f(x) (**graph stats**).

Les valeurs de x_i sont stockées dans la liste L_1 et les pourcentages dans la liste L_3.

On ajuste automatiquement la fenêtre en appuyant sur zoom 9 .

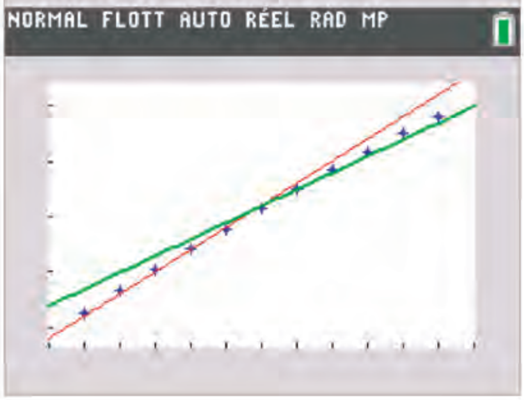


3. Droite d'ajustement

On entre les expressions des droites en appuyant sur f(x) et on visualise la représentation graphique de la droite et du nuage en appuyant sur graphe .

Après une recherche par essais successifs on trouve que la droite d'équation $y = 4x$ est une bonne approximation du nuage de points.

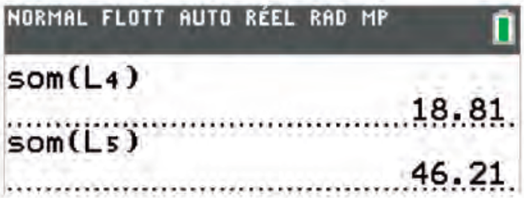
La droite d'équation $y = 3x + 8$ est aussi convenable.

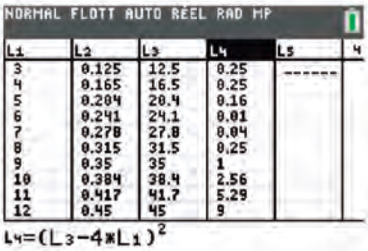


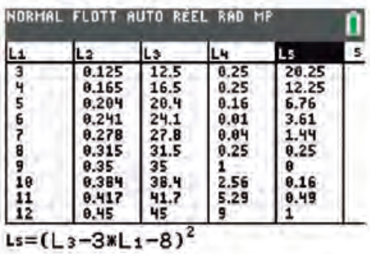
4. Calcul d'erreur

Calculons $(y_1 - 4x_1)^2$ puis $(y_2 - 4x_2)^2$, etc… à l'aide des listes :

On calcule la somme de tous les éléments de L_4 en appuyant sur 2nde stats onglet **MATH** et choisir **som**.







La droite rouge approxime mieux le nuage de points que la droite verte.

Loi binomiale

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com Javier gonzalez

Une usine fabrique des stylos. On sait que 4% des stylos possèdent un défaut de fabrication.

L'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 120 stylos.

Le fait qu'un stylo possède ou non un défaut de fabrication est indépendant des autres stylos.

On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.

On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (à 10^{-3} près) :
   a. Obtenir 3 stylos défectueux dans le paquet.
   b. Obtenir strictement moins de 7 stylos défectueux dans le paquet.
   c. Obtenir 10 stylos défectueux ou plus.

3. Représenter graphiquement le nuage de points $(k, p(X = k))$. Pour quelle valeur de k la probabilité $p(X = k)$ est-elle la plus grande ?

4. Le directeur de l'entreprise souhaite pouvoir dire qu'il y a plus d'une chance sur dix qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux. Peut-il le dire actuellement ? Et si les paquets ne comportaient que 55 stylos ?

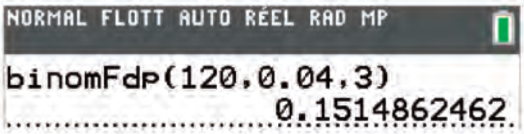
1. Paramètre de la loi

D'après l'énoncé « l'entreprise confectionne des paquets contenant chacun 120 stylos » et « 4% des stylos possèdent un défaut de fabrication ».

On sait que X suit une loi binomiale donc ses paramètres sont $n = 120$ et $p = 0{,}04$.

2. Calculs de probabilités

a. On cherche $p(X = 3)$. Pour calculer cette probabilité on appuie sur 2nde var (distrib) puis on sélectionne **binomFdp**. On complète la boite de dialogue par les valeurs de n et p puis la valeur de X recherchée.
Ici on obtient $p(X = 3) \approx 0{,}151$ à 10^{-3} près.



Loi binomiale

Pour avoir $p(X < 7) = p(X \leq 6)$ on utilise 2nde var (distrib) puis **binomFRép** et on complète la boite de dialogue avec les paramètres de notre loi.
On trouve $p(X < 7) \approx 0{,}794$.

Pour calculer la probabilité d'obtenir 10 stylos défectueux ou plus il faut calculer $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0{,}023$.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFRép(120,0.04,6)
                  0.7942803751
1-binomFRép(120,0.04,9)
                  0.0225686271
```

3. Nuage de points

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
        suite
 Expr:K
 Variable:K
 début:0
 fin:120
 pas:1
 Coller
```

Pour afficher ce nuage de points, on commence par construire la liste L_1 avec toutes les valeurs entières de k de 0 à 120.
On utilisera l'instruction **suite** accessible dans (2nde stats OP) :

L₁=suite(K,K,0,120,1)

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

L₁	L₂	L₃	L₄	L₅
0	0.0075	------	------	------
1	0.0373			
2	0.0924			
3	0.1515			
4	0.1846			
5	0.1785			
6	0.1425			
7	0.0967			
8	0.0569			
9	0.0295			
10	0.0137			

L₂=binomFdp(120,0.04,L₁)

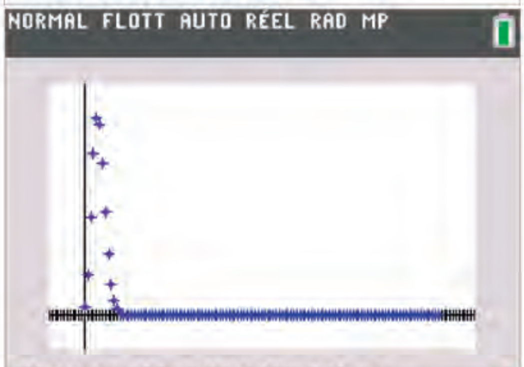
Dans L_2 on entrera les probabilités $p(X = k)$ correspondantes à l'aide de **binomFdp** accessible dans 2nde var (distrib) **binomFdp**. Ne pas oublier de mettre L_1 comme valeur de **x** dans la boite de dialogue :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
            binomFdp
nbreEssais:120
p:0.04
valeur de x:L₁
Coller
```

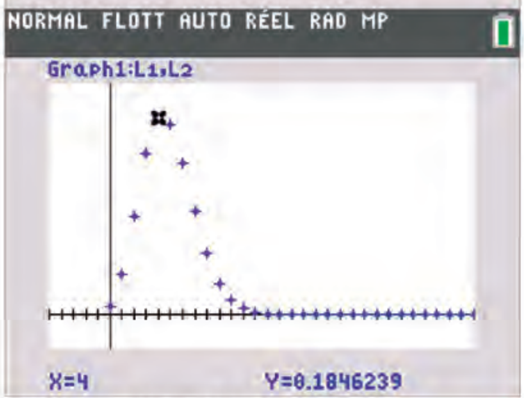
Puis on paramètre le graphique statistique en appuyant sur 2nde f(x) (graph stats) puis

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
Aff NAff
Type:
Xliste :L₁
Yliste :L₂
Marque :□ + · ·
Couleur: BLEU
```

pour ajuster la fenêtre zoom 9 . On obtient le graphique ci-contre :



On peut améliorer la fenêtre d'affichage en appuyant sur fenêtre et choisir $-5 \leq X \leq 30$.



A l'aide de trace et en déplaçant le curseur on constate que la plus grande probabilité est atteinte pour $X = 4$.

4. La publicité du directeur

La probabilité qu'un paquet ne comporte aucun stylo défectueux est :

$p(X = 0) \approx 0{,}007$. On est loin d'une chance sur 10…

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFdp(120,0.04,0)
                  0.0074567222
```

Par contre si les paquets contiennent 55 stylos alors la probabilité qu'un paquet ne comporte pas de stylo défectueux est $0{,}106$. L'affirmation du directeur sera vraie dans ce cas.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFdp(55,0.04,0)
                  0.1059053298
```

Simulation d'une loi binomiale

Enoncé

Dans un groupe de 6 personnes, on joue à un jeu de grattage. On simule ce jeu à l'aide de scripts en Python :

1. On considère la fonction Python **alea** qui prend comme paramètre un entier **n** et qui renvoie un entier **s**. Soit X la variable aléatoire représentant le résultat de cette fonction. Quelle loi suit X ?

2. On cherche à déterminer une valeur approchée de $p(X \geq 3)$. Compléter le script de la fonction **simul** qui prend comme argument un entier **p** et qui renvoie une valeur approchée de $p(X \geq 3)$. Exécuter la fonction en prenant **p=500**.

3. A l'aide du triangle de Pascal, donner la valeur de $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$ et $\binom{6}{2}$. Puis en déduire $p(X = 0), p(X = 1), p(X = 2)$ et enfin $p(X \leq 2)$ et $p(X \geq 3)$. La valeur approchée trouvée au 2°) est-elle convenable ?

4. Représenter graphiquement l'histogramme des valeurs de $p(X = k)$ avec k un entier compris entre 0 et 6.


```
ÉDITEUR : BINGO
LIGNE DU SCRIPT 0011
from random import *
def alea(n):
  s=0
  for i in range(6):
    a=random()
    if a<0.3:
      s=s+1
  return s
```

```
ÉDITEUR : BINGO
LIGNE DU SCRIPT 0016
def simul(p):
  t=0
  for i in range(p):
    b=alea(6)
    if b>=3:
      t=t+1
  return ....
```

1. Fonction alea

La fonction **alea** choisit aléatoirement 6 fois de suite, de façon indépendante, un nombre réel compris entre 0 et 1. Si ce nombre est plus petit que 0,3 alors on ajoute 1 au compteur **s**.

A la fin de la boucle, **s** représente le nombre de fois où le nombre aléatoire a été plus petit que 0,3.

On peut donc affirmer que **s** simule une loi binomiale X de paramètre **n=6** et **p=0,3**.

```
PYTHON SHELL
>>> alea(6)
3
>>> alea(6)
2
>>> alea(6)
1
>>> alea(6)
2
>>> alea(6)
0
>>> |
Fns… | a A # | Outils | Éditer | Script
```

2. Calcul de probabilité d'une loi binomiale

Dans ce script, **t** représente le nombre de fois où on a obtenu un résultat supérieur ou égal à 3 avec la fonction **alea**.

Ainsi **t/p** représente la fréquence des résultats où **alea** est supérieure ou égale à 3 ce qui correspond à une valeur approchée de $p(X \geq 3)$.

On trouve $p(X \geq 3) \approx 0{,}24$.

```
PYTHON SHELL
>>> # Shell Reinitialized
>>> # L'exécution de BINGO
>>> from BINGO import *
>>> simul(500)
0.246
>>> simul(500)
0.244
>>> |
Fns… | a A # | Outils | Éditer | Script
```

```
ÉDITEUR : BINGO
LIGNE DU SCRIPT 0022
def simul(p):
  t=0
  for i in range(p):
    b=alea(6)
    if b>=3:
      t=t+1
  return t/p
Fns… | a A # | Outils | Exéc | Script
```

Simulation d'une loi binomiale

3. Calcul de $p(X \geq 3)$

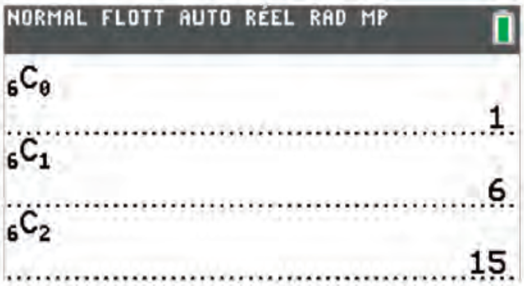
Après avoir dressé le triangle de Pascal, on trouve :

$\binom{6}{0} = 1$; $\binom{6}{1} = 6$

et $\binom{6}{2} = 15$

Ligne 0							1						
Ligne 1						1		1					
Ligne 2					1		2		1				
Ligne 3				1		3		3		1			
Ligne 4			1		4		6		4		1		
Ligne 5		1		5		10		10		5		1	
Ligne 6	1		6		15		20		15		6		1

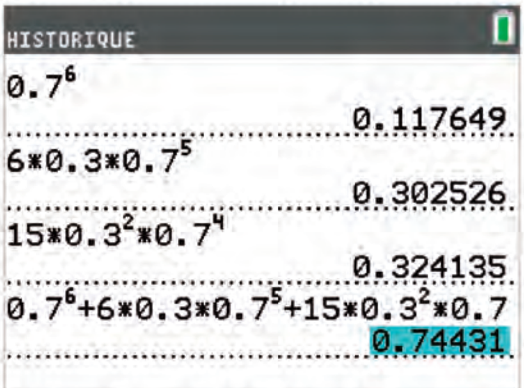
On peut vérifier ces résultats en calculant les combinaisons dans math **PROB Combinaison**.



On en déduit $p(X = 0) = \binom{6}{0} 0{,}3^0 \times 0{,}7^6 \approx 0{,}118$

$p(X = 1) = \binom{6}{1} 0{,}3^1 \times 0{,}7^5 \approx 0{,}303$ et $p(X = 2) = \binom{6}{2} 0{,}3^2 \times 0{,}7^4 \approx 0{,}324$

Donc $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0{,}744$ on en déduit alors $p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - p(X \leq 2) = 0{,}256$ ce qui correspond au résultat trouvé dans la question 2.



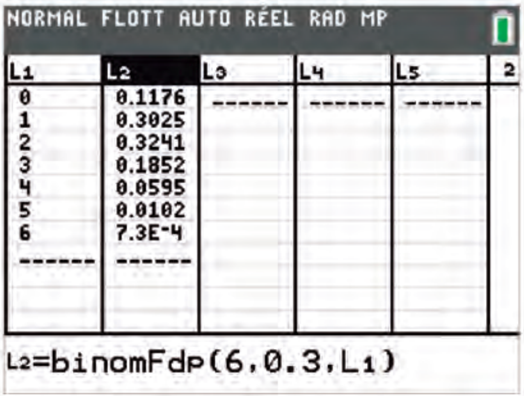
4. Histogramme

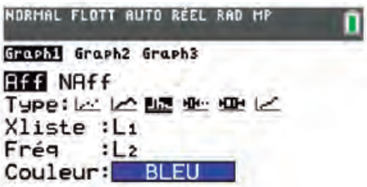
On commence par construire les listes en appuyant sur stats **Modifier**.

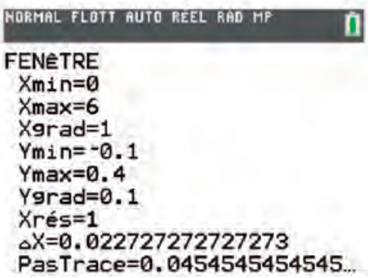
Dans la liste L_1 on entre les valeurs entières de **k** de 0 à 6 et dans L_2 les valeurs de $p(X = k)$ en écrivant **binomFdp(6,0.3,L₁)** en utilisant 2nde var (distrib).

Puis on paramètre le type de graphique (2nde f(x) (graph stats)) souhaité.

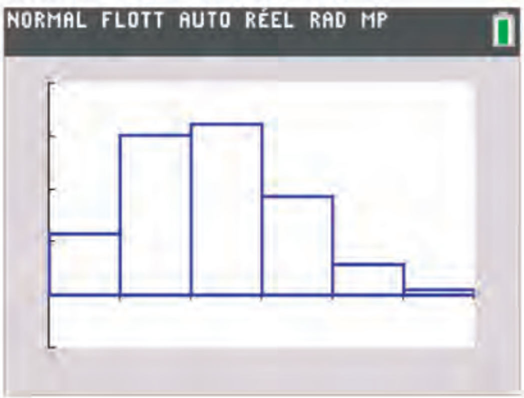
Et enfin la fenêtre en appuyant sur fenêtre.







L'histogramme apparait en appuyant sur graphe .



Loi binomiale et seuil

Enoncé

Anne s'entraine régulièrement au tir à l'arc. Elle a remarqué que la probabilité de tirer dans le centre jaune de la cible (on dira aussi tirer dans le mille) est de 0,19 en toute circonstance.
Soit n le nombre de flèches lancées par Anne et X_n la variable aléatoire donnant le nombre de flèches qui ont atteint le centre jaune de la cible.

Crédit photo : www.pexels.com – Mikhail Nilov

1. Quelle loi suit X_n ? Donner ses paramètres.

2. Dans cette question $n = 3$, c'est-à-dire qu'Anne tire 3 flèches. Calculer les probabilités des événements suivants (à 10^{-3} près) :
   a. Tirer dans le mille 3 fois.
   b. Ne jamais tirer dans le mille.
   c. Tirer dans le mille 1 fois exactement.

3. Lors des n lancers on note : E_n l'événement « Anne n'a jamais tiré dans le mille » et F_n ; « Anne a tiré au moins une fois dans le mille ». Exprimer E_n et F_n à l'aide de X_n et calculer $p(E_n)$ et $p(F_n)$.

4. Représenter graphiquement le nuage de points $(n, p(F_n))$, $1 \leq n \leq 10$. Quelle tendance semble suivre ce nuage ?

5. Compléter le script Python **seuil**, qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p(F_n) \geq 0{,}99$. Lancer cette fonction. Quelle valeur obtient-on ?

1. Loi de X_n

Nous sommes en présence d'une expérience aléatoire à deux issues possibles : Tirer dans le mille ou son contraire (loi de Bernoulli) qu'on répète n fois de suite de façon indépendante. Ainsi X_n le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où Anne vise dans le mille lors des n lancers, suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}19$.

2. Etude de X_3

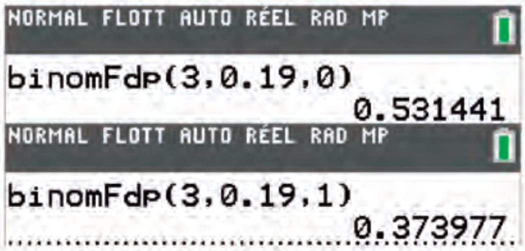
a. L'événement « tirer dans le mille 3 fois » correspond à $X_3 = 3$.

Pour calculer cette probabilité on appuie sur [2nde] [var] (distrib), puis sélectionner **binomFdp**. On complète la boite de dialogue par les valeurs de n et p puis la valeur de X recherchée qui est 3 ici.
Ici on obtient $p(X_3 = 3) \approx 0{,}007$ à 10^{-3} près.

Loi binomiale et seuil

L'événement « ne jamais tirer dans le mille» correspond à $X_3 = 0$.
On trouve $p(X_3 = 0) \approx 0{,}531$ à 10^{-3} près.

L'événement « tirer dans le mille 1 fois exactement» correspond à $X_3 = 1$.
On a donc $p(X_3 = 1) \approx 0{,}374$ à 10^{-3} près.



3. Calcul de $p(E_n)$ et $p(F_n)$

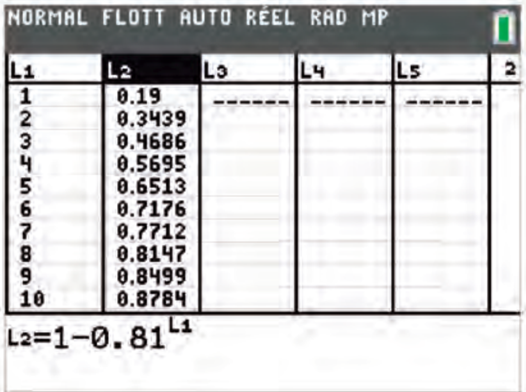
L'événement E_n correspond à $X_n = 0$.
On a $p(E_n) = p(X_n = 0) = (1 - 0{,}19)^n = 0{,}81^n$.

L'événement F_n correspond à $\overline{E_n}$.
On a $p(F_n) = p(\overline{E_n}) = 1 - p(E_n) = 1 - 0{,}81^n$.

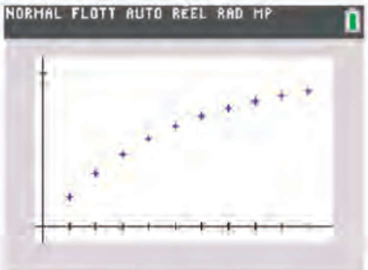
4. Graphique $(n, p(F_n))$

On appuie sur stats pour modifier les listes. Dans la liste L_1 on entre les valeurs de n de 1 à 10.

Dans L_2 on entrera les probabilités $p(F_n)$ pour les valeurs de k définies dans L_1. On entre donc tout en haut de liste L_2 : $L_2 = 1 - 0.81^{L_1}$



Pour afficher le nuage de points : 2nde f(x) puis zoom 9



On constate que les valeurs de $p(F_n)$ semblent se rapprocher de 1 lorsque n augmente.

5. Fonction seuil

A chaque tour de boucle il faut augmenter la valeur de **n** jusqu'à obtenir la valeur qui dépasse 0,99 et qui arrête la boucle.

```
ÉDITEUR : ARC
LIGNE DU SCRIPT 0001
def seuil():
  n=1
  while 1-0.81**n<0.99:
    n=n+1
  return n
```

On trouve qu'à partir de **n=22** la probabilité $p(F_n)$ dépasse 0,99. On vérifie ce résultat en console.

```
PYTHON SHELL
>>> # Shell Reinitialized
>>> # L'exécution de ARC
>>> from ARC import *
>>> seuil()
22
>>> 1-0.81**21
0.9880274848174381
>>> 1-0.81**22
0.9903022627021247
>>> |
Fns… | a A # | Outils | Éditer | Script
```

Thème: Probabilités

Triangle de Pascal et loi binomiale

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Artem Podrez

```
def newline(l):
  a=[1]
  n=len(l)
  for i in range(n-1):
    c=l[i]+l[i+1]
    a.append(c)
  a.append(1)
  return a
```

```
def pascal(n):
  l=[1]
  for i in range(n):
    l=newline(l)
  return l
```

Voici la répartition en France des différents groupes sanguins selon les différents rhésus :

	O	A	B	AB
Rhésus +	36%	37%	9%	3%
Rhésus -	6%	7%	1%	1%

1. On note **p** la probabilité qu'une personne prise au hasard en France soit du groupe O. Donner la valeur de **p**.

2. On choisit au hasard un groupe de 10 personnes. On note X la variable aléatoire qui dénombre les personnes ayant un groupe O. Quelle loi suit X ?

3. Afin de calculer des probabilités autour de X, on va construire le triangle de Pascal grâce à un script Python. Que faut-il taper en console pour obtenir les coefficients du triangle de Pascal permettant de calculer les valeurs de $p(X=k)$?

4. En déduire la probabilité que 6 personnes aient un groupe O sur les 10 personnes choisies au hasard.

5. La fonction suivante permet de déterminer la loi de X. Coder cette fonction **loiproba** en Python et l'exécuter pour obtenir la loi de X.

```
Fonction loiproba() :
   c est la liste des coefficients de la ligne 10 du triangle de Pascal
   p prend la valeur 0,42 et a prend la valeur 0,58
   l est une liste vide
   Pour i allant de 0 à 10
       u prend la valeur c[i]×p^i×q^(10-i)
       ajouter u à la liste l
   renvoyer l
```

On l'exécutera puis on complétera la tableau ci-dessous à 10^{-2} près.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X=k)$											

1. Français de groupe O

Il y a 36% des français avec un groupe O+ et 6% avec un groupe 0- cela représente donc un total de 42%. Donc **p=0,42**.

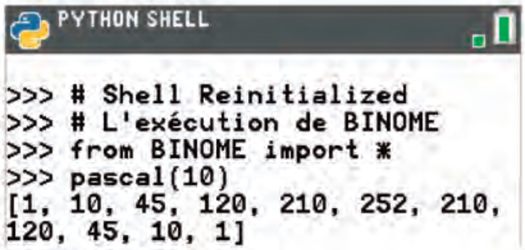
2. Loi de X

X suit une loi binomiale de paramètre **n=10** et **p=0,42**.

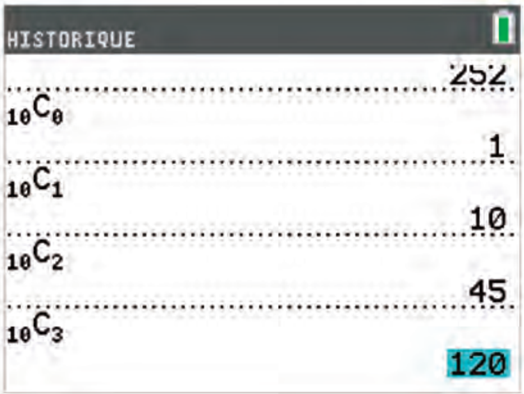
Triangle de Pascal et loi binomiale

3. Triangle de Pascal

Le fonction **`newline`** permet de construire la ligne suivante du triangle de Pascal à partir de la ligne courante. La fonction **`pascal`** qui prend comme paramètre un entier **`n`** construit toutes les lignes du triangle de Pascal jusqu'à la ligne **`n`** qu'elle renvoie. Il fallait donc entrer en console **`pascal(10)`** car X suit une loi binomiale de paramètre n=10.



On peut vérifier ces résultats en sortant du mode Python, avec notre calculatrice en appuyant sur math **PROB Combinaison**. On constate bien que les premiers coefficients correspondent bien.



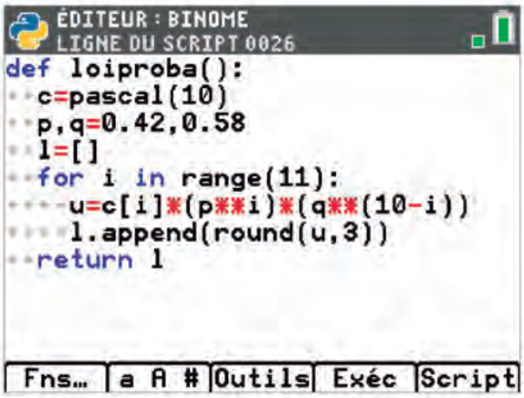
4. Calcul de $p(X = 6)$

D'après le résultat de la question précédente $\binom{10}{6} = 210$.

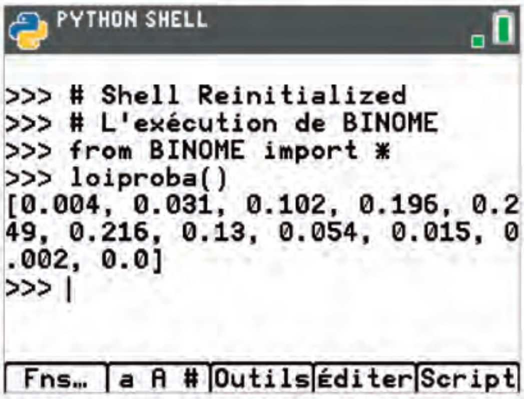
On obtient ainsi $p(X = 6) = 210 \times 0{,}42^6 \times 0{,}58^4 \approx 0{,}13$.

5. Fonction `loiproba`

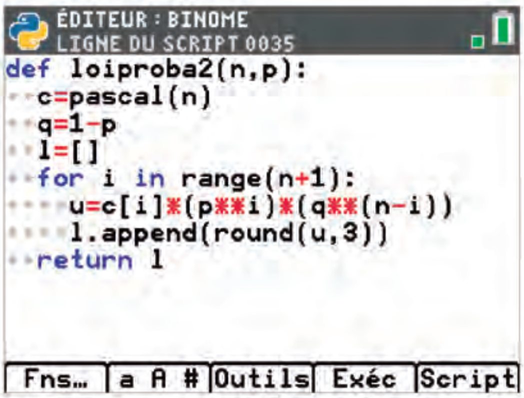
Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près on a utilisé l'instruction **`round(u,3)`** lorsqu'on ajoute **`u`** à la liste **`l`**.



Voici le tableau de la loi de X :



Remarque : Cette fonction peut facilement se généraliser en ajoutant deux paramètres : **`n`** pour obtenir la loi binomiale de paramètre **`n`** et **`p`**. On a appelé cette fonction **`loiproba2`** dont voici le script ci-contre.



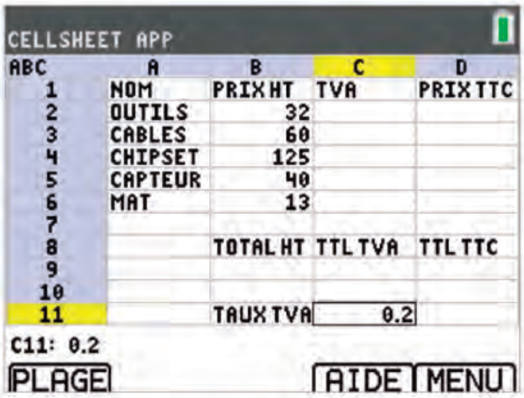
Utilisation du tableur

Enoncé

On souhaite utiliser un tableur pour automatiser le calcul de prix en tenant compte de la TVA.

Crédit photo : www.pexels.com – Pixabay

1. A l'aide de l'application `CelSheet` de la calculatrice, entrer les valeurs suivantes :



CELLSHEET APP

ABC	A	B	C	D
1	NOM	PRIX HT	TVA	PRIX TTC
2	OUTILS	32		
3	CABLES	60		
4	CHIPSET	125		
5	CAPTEUR	40		
6	MAT	13		
7				
8		TOTAL HT	TTL TVA	TTL TTC
9				
10				
11		TAUX TVA	0.2	

C11: 0.2

PLAGE AIDE MENU

2. Quelle formule faut-il écrire en **C2** pour calculer le montant de la TVA (il faudra faire référence au taux de TVA de la cellule `C11`). Copier-Coller cette formule vers le bas pour effectuer tous les calculs de TVA.

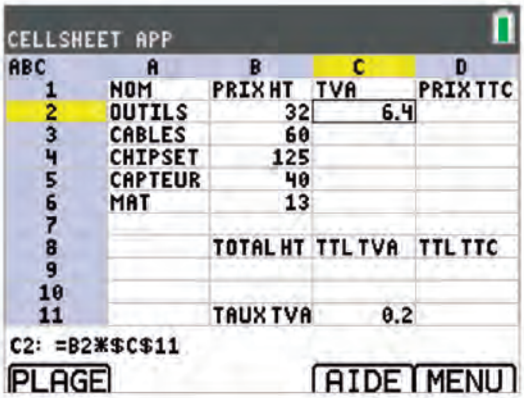
3. Quelle formule faut-il écrire en **D2** pour obtenir le prix TTC ? Copier-Coller cette formule vers le bas pour effectuer tous les calculs des prix TTC.

4. On souhaite obtenir le montant total de la facture. Ecrire en **B9** une formule permettant de calculer la somme de tous les prix HT. Copier-Coller cette formule pour calculer les deux autres montants totaux.

5. Représenter graphiquement le diagramme circulaire représentant la répartition des montants de la facture.

1. Entrer les données

Pour ouvrir le tableur on appuie sur [2nde] [résol] (apps) et on choisit `CelSheet`.
On appuie sur [entrer] pour modifier le contenu d'une cellule.
Pour entrer du texte dans une cellule il faut d'abord appuyer sur ["].



CELLSHEET APP

ABC	A	B	C	D
1	NOM	PRIX HT	TVA	PRIX TTC
2	OUTILS	32	6.4	
3	CABLES	60		
4	CHIPSET	125		
5	CAPTEUR	40		
6	MAT	13		
7				
8		TOTAL HT	TTL TVA	TTL TTC
9				
10				
11		TAUX TVA	0.2	

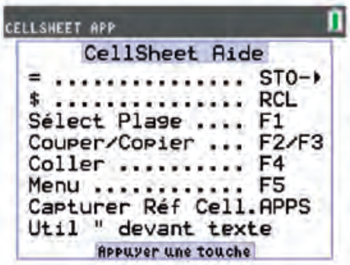
C2: =B2*C11

PLAGE AIDE MENU

2. Calculs de la TVA

La formule qu'il faut écrire dans **C2** est : **=B2*C11**. Le dollar est accessible dans le menu au bas de l'écran : [$].

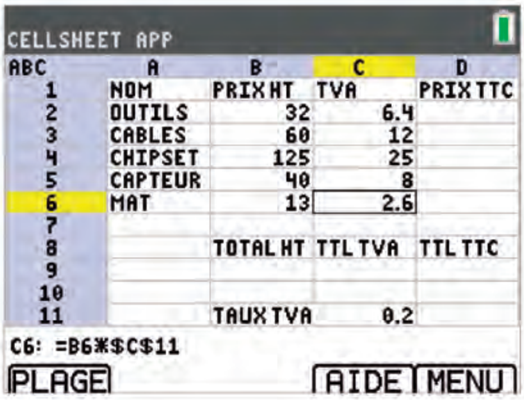
Il ne faut pas oublier de commencer la formule par [=].



Pour copier-coller la formule vers le bas, on se place sur la cellule **C2**, on la copie en appuyant sur F3 et en se plaçant sur **C3** on colle la formule en appuyant sur F4.

On continue à coller dans les cellules **C4**, **C5** et **C6**.

On sort du mode « copier-coller » en appuyant sur [2nde] [mode] (quitter).



CELLSHEET APP

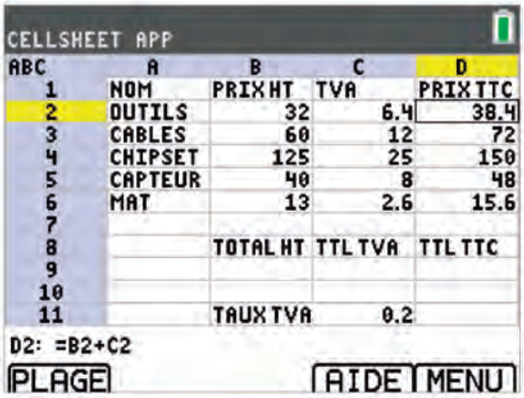
ABC	A	B	C	D
1	NOM	PRIX HT	TVA	PRIX TTC
2	OUTILS	32	6.4	
3	CABLES	60	12	
4	CHIPSET	125	25	
5	CAPTEUR	40	8	
6	MAT	13	2.6	
7				
8		TOTAL HT	TTL TVA	TTL TTC
9				
10				
11		TAUX TVA	0.2	

C6: =B6*C11

PLAGE AIDE MENU

Utilisation du tableur

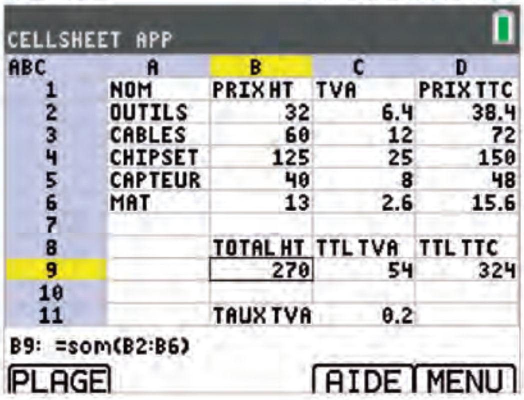
3. Calculs du prix TTC



La formule qu'il faut écrire dans **D2** est : **=B2+C2**.

On copie-colle la formule en utilisant la procédure de la question précédente.

4. Calculs de sommes



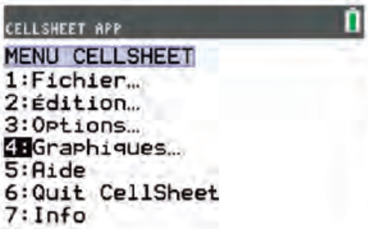
Pour calculer la somme de la plage **B2:B6** on se place tout d'abord sur la cellule **B9**, on appuie sur [entrer] puis [=].

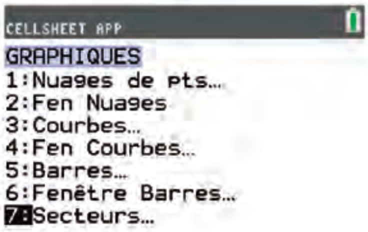
On trouve la fonction somme dans [FONCT] et on choisit **somme** puis on entre la plage **B2:B6**, on ferme la parenthèse et on valide.

On copie-colle la formule dans les cellules **C9** et **D9**.

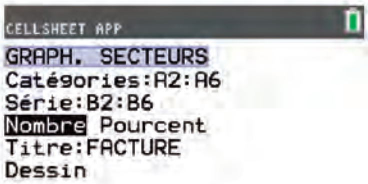
5. Diagramme circulaire

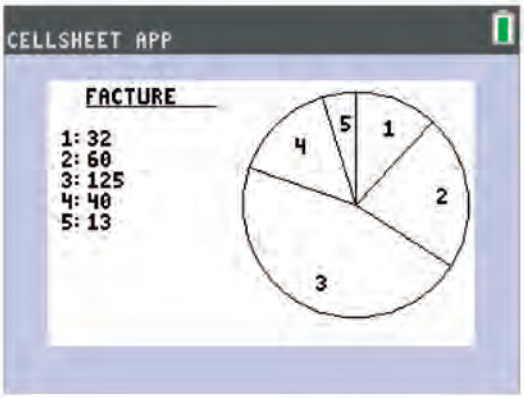
Dans [MENU] on choisit Graphiques puis Secteurs.





On entre les Catégories : **A2:A6** et les valeurs de la série **B2:B6**.





Thème : Analyse

Régionnement du plan

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Edoardo Tommasini

Un centre de loisirs d'une station balnéaire du sud de la France, propose de prendre une carte d'abonnement annuelle de 140 €, commune à la discothèque et au cinéma.

A la discothèque, l'entrée sans réduction est de 15 € et l'abonnement donne droit à une réduction de 40 %. Au cinéma, l'entrée sans réduction est de 8 € et l'abonnement donne droit à une réduction de 50 %. Soit x le nombre annuel d'entrées à la discothèque et y le nombre annuel d'entrées au cinéma. On note A les dépenses annuelles effectuées par un utilisateur pour la discothèque et le cinéma avec la carte d'abonnement, B les dépenses annelles sans carte d'abonnement. Enfin, on pose $E = B - A$.

1. Comparer A et B si l'utilisateur effectue 12 entrées à la discothèque et 15 entrées au cinéma.

2. a. Exprimer A , B et E en fonction de x et y.

b. Pour quelles valeurs du couple $(x\,;\,y)$ a-t-on $E = 0$? Qu'est-ce que cela représente dans notre situation ?

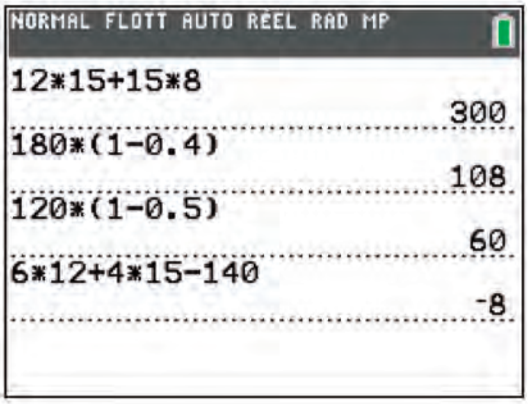
c. Représenter dans un repère l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan pour lesquels la carte d'abonnement est rentable.

1. Comparaison

Sans la carte d'abonnement, l'utilisateur dépense $12 \times 15 = 180$ € pour la discothèque et $15 \times 8 = 120$ € pour le cinéma soit des dépenses annuelles de $B = 180 + 120 = 300$ €.

S'il achète la carte d'abonnement d'un montant de 140 € il dépensera $180 \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 108$ € pour la discothèque et $120 \times \left(1 - \frac{50}{100}\right) = 60$ € pour le cinéma soit des dépenses annuelles de $A = 140 + 108 + 60 = 308$ €.

On obtient $B \leq A$ donc dans ce cas, il est plus économique pour l'utilisateur de ne pas acheter la carte d'abonnement.



2.a. Cas général

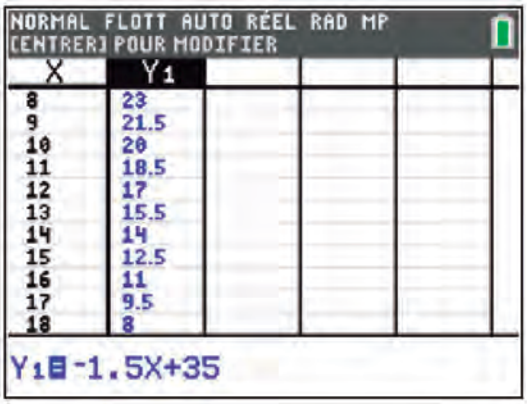
Tout d'abord $B = 15x + 8y$ et puisque nous savons qu'une baisse de 40% correspond à multiplier par un coefficient de 0,6 et qu'une baisse de 50 % correspond à multiplier par un coefficient de 0,5 on obtient $A = 140 + (15 \times 0{,}6)x + (8 \times 0{,}5)y = 140 + 9x + 4y$.

Ainsi $E = B - A = (15x + 8y) - (140 + 9x + 4y) = 6x + 4y - 140$.

On retrouve alors avec $x = 12$ et $y = 15$ que $E = -8$ soit une économie de 8 € sans acheter la carte d'abonnement.

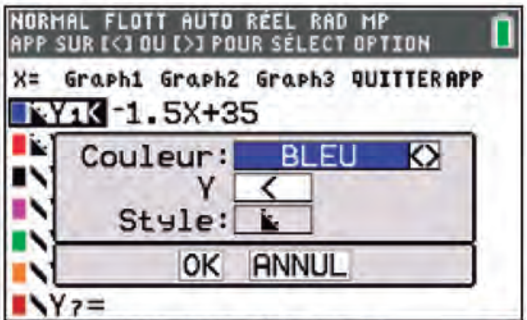
2.b. Situation E=0

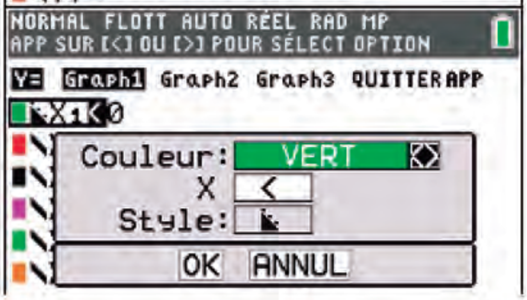
On a $E = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 140 = 0 \Leftrightarrow y = -1{,}5x + 35$. On obtient l'équation réduite d'une droite : tous les couples d'entiers $(x\,;\,y)$ vérifiant cette équation sont solutions de $E = 0$ c'est-à-dire qu'ils vérifient une dépense annuelle identique avec ou sans la carte d'abonnement. Par exemple, grâce au tableau de valeurs ci-contre obtenu avec la calculatrice dans le menu 2nde graphe après avoir rentré la fonction dans f(x), avec 16 entrées à la discothèque et 11 entrées au cinéma l'utilisateur dépensera 328 € avec ou sans la carte d'abonnement.



2.c. Régionnement

On veut obtenir dans un repère une région du plan où la carte d'abonnement est rentable c'est-à-dire lorsque $B \geq A$ soit $E \geq 0$. Cela se traduit par $y \geq -1{,}5x + 35$. On cherche donc tous les couples d'entiers $(x\,;\,y)$ vérifiant les contraintes : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -1{,}5x + 35 \end{cases}$.

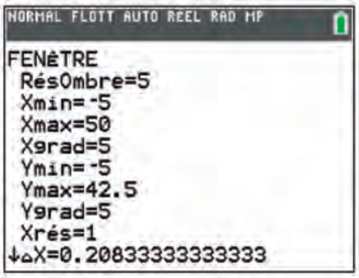




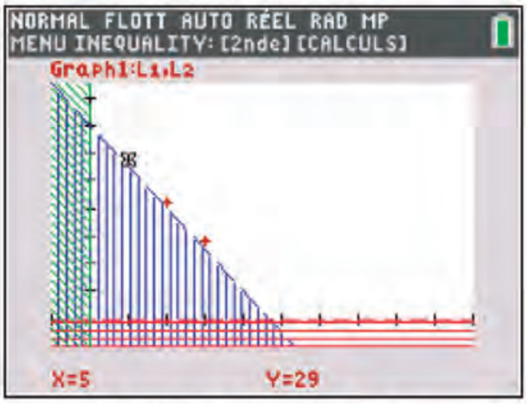
On ouvre alors l'application **Inequalz** de la calculatrice en appuyant sur le menu 2nde résol. D'un point de vue pratique pour la lisibilité, nous allons hachurer la région du plan qui ne convient pas c'est-à-dire le contraire des inégalités précédentes. En plaçant le curseur sur le rectangle de couleur et en appuyant sur entrer, il est possible de modifier la couleur ainsi que la partie du plan à hachurer pour Y_1 et Y_2.

Puis on se déplace sur **X=** en haut à gauche, on appuie sur entrer et on fait de même pour les droites verticales.

Enfin on règle la fenêtre d'affichage avec la touche fenêtre en paramétrant la taille des hachures avec **RésOmbre** et les graduations toutes les 5 unités.



Il est aussi possible de rajouter des points dans la partie des solutions à l'aide des listes L_1 et L_2 et de les afficher comme ci-dessus.



Les points de coordonnées $(5\,;\,29)$, $(10\,;\,21)$ et $(15\,;\,18)$ sont par exemple des solutions pour lesquelles l'achat de la carte d'abonnement est rentable. Attention, ne pas oublier de quitter l'application pour ne pas gêner l'étude classique des fonctions !

Programmation linéaire

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Artem Podrez

Un représentant pour une société commerciale prépare sa tournée : il vend deux types de produits A et B, conditionnés dans des cartons de 40 dm^3 pesant respectivement 30 kg et 15 kg.

Il s'approvisionne chez un fournisseur qui facture à la société 20 € le carton de produit A et 40 € le carton de produit B. La société ne peut pas acheter plus de 1 700 € de produits et le représentant doit limiter son chargement à 1,2 tonnes et 2 000 dm^3. Soit x le nombre de cartons de produit A et y celui de produit B.

La société qui l'emploie lui rémunère, par carton vendu, 12 € pour le produit A et 8 € pour le produit B.

On suppose qu'il peut vendre l'ensemble de sa cargaison.

1. Etablir le système de contraintes et représenter graphiquement ce système en prenant 1 unité pour 5 cartons de produit A en abscisses et une unité pour 5 cartons de produit B en ordonnée.

2. Déterminer les coordonnées des sommets du polygone solution.

3. a. Exprimer le revenu R du représentant en fonction de x et de y puis tracer la droite (Δ) correspondant à un revenu égal à 360 €.

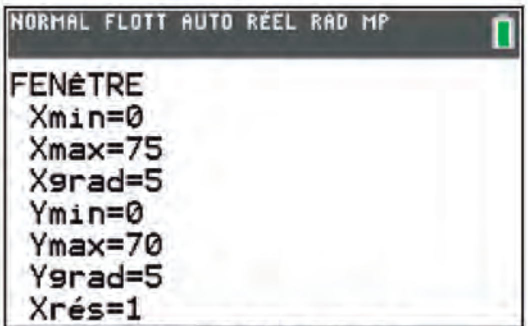
   b. Représenter alors graphiquement la droite (Δ_{Rmax}) correspondant à un revenu maximal R_{max} et déterminer quelle est la composition du chargement qui lui assurera le revenu le plus intéressant.

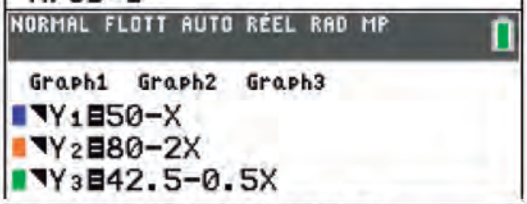
1. Contraintes

Tout d'abord les quantités x et y sont positives. Ensuite nous prenons en compte le volume à ne pas dépasser : $40x + 40y \leq 2\,000 \Leftrightarrow x + y \leq 50$ ainsi que le poids limite : $30x + 15y \leq 1\,200 \Leftrightarrow 2x + y \leq 80$.

Enfin, concernant le budget limité à 1 700 € cela se traduit par la contrainte $20x + 40y \leq 1\,700 \Leftrightarrow x + 2y \leq 85$ soit un système complet de contraintes qui s'écrit :

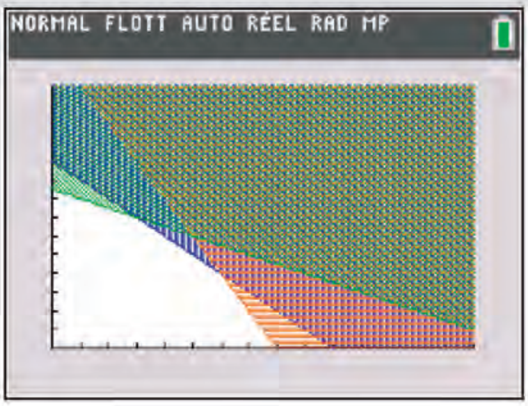
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x + 2y \leq 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 50 - x \\ y \leq 80 - 2x \\ y \leq 42{,}5 - 0{,}5x \end{cases}.$$





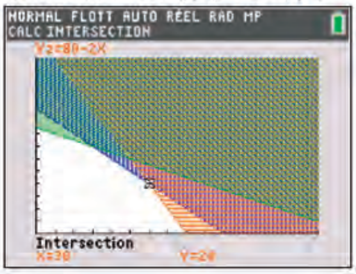
Pour obtenir dans un repère la région du plan correspondant aux couples d'entiers $(x\,;\,y)$ vérifiant ce système, nous règlerons la fenêtre d'affichage via la touche [fenêtre] comme ci-contre ce qui permet déjà de vérifier $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Après avoir complété les équations des droites frontières dans le menu [f(x)], nous choisirons pour une meilleure lisibilité, d'hachurer la région du plan qui ne convient pas c'est-à-dire le contraire des inégalités précédentes. En plaçant le curseur sur le rectangle de couleur et en appuyant sur [entrer], il est possible de modifier la couleur ainsi que la partie du plan à hachurer pour chacun des Y_i.

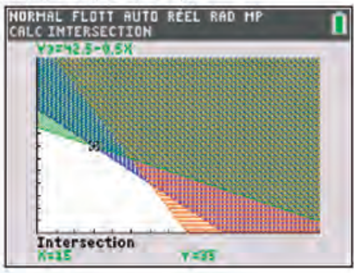
Nous obtenons alors le domaine ci-contre.



2. Polygone solution

On détermine les coordonnées des sommets du polygone solution en cherchant les intersections des différentes droites frontières qui le définissent. Nous obtenons successivement en utilisant le menu `calculs`, obtenu avec les touches 2nde trace et en sélectionnant la commande `5:intersection`, les points suivants : $(0\,;\,42{,}5)$, $(40\,;\,0)$, $(30\,;\,20)$ et $(15\,;\,35)$.

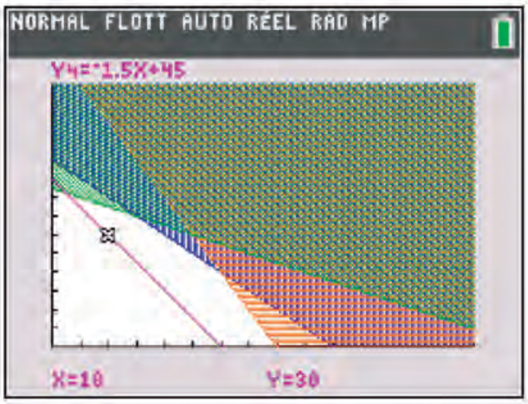




3.a. Droite des revenus

Le représentant est rémunéré 12 € par carton vendu du produit A et 8 € par carton vendu du produit B. Ainsi son revenu est égal à R= $12x + 8y$ soit $y = -\frac{3}{2}x + \frac{R}{8}$.

Avec un revenu égal à 360 € cette droite a pour équation $y = -\frac{3}{2}x + 45$. Nous voyons qu'elle traverse le polygone solution donc ce revenu est envisageable, par exemple avec le couple $(10\,;\,30)$.

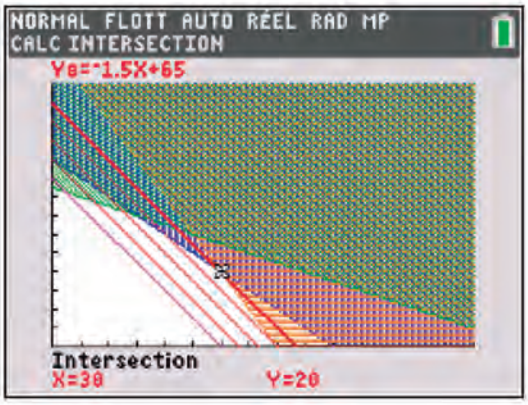


3.b. Revenu maximal

Pour construire graphiquement la droite (Δ_{Rmax}) correspondant à un revenu maximal R_{max} , il suffit de tracer la droite parallèle à (Δ) (les coefficients directeurs étant tous égaux à $-\frac{3}{2}$) d'ordonnée à l'origine la plus élevée et qui reste en contact avec le polygone solution.

On a construit plusieurs droites du faisceau, parallèles à (Δ) et on trouve ainsi la droite (Δ_{Rmax}) d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 65$ dont le point d'intersection avec le polygone solution est $(30\,;\,20)$.

Le représentant doit donc charger chez son fournisseur 30 cartons du produit A et 20 cartons du produit B, ce qui lui assurera un revenu maximal égal à R_{max}= $12 \times 30 + 8 \times 20 = 520$ €.

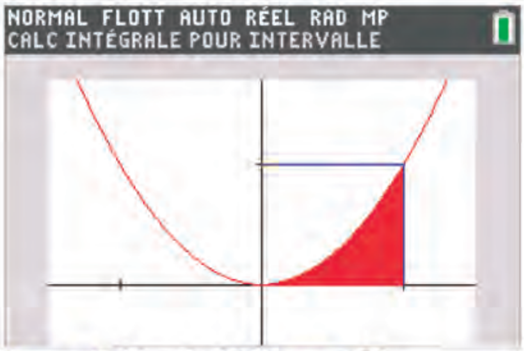


Méthode de Monte-Carlo

Enoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On cherche à calculer A l'aire délimitée par C_f, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a représenté cette aire en rouge ci-contre.



Pour calculer A on va utiliser la méthode de Monte-Carlo qui consiste à générer aléatoirement n points dans le carré de côté 1 contenant notre aire. La proportion des points à l'intérieur de notre aire nous donnera une valeur approchée de A.

1. Ecrire la fonction Python **f** qui prend comme argument **x** et qui renvoie **x²**. Exécuter le script et calculer les images de 1 et 1,5.

```
def f(x):
  y=.....
  return y
```

2. Compléter la fonction Python **graphe** qui représente graphiquement la fonction **f** sur l'intervalle $[0; 1]$.

```
import ti_plotlib as plt
def graphe():
  plt.cls()
  plt.window(-0.5,1.5,-0.3,1.2)
  plt.axes("on")
  for i in range(500):
    plt.plot(i/500,......,".")
  plt.color(0,0,255)
  plt.line(0,1,1,1,"")
  plt.line(1,1,1,0,"")
```

3. Compléter la fonction Python **mc** qui prend comme argument **n** et qui affiche au hasard **n** points dans le rectangle bleu puis dénombre les points à l'intérieur de l'aire recherchée et affiche la proportion des points à l'intérieur de l'aire A. Lancer la fonction en prenant $n = 1000$.

```
from random import *
def mc(n):
  graphe()
  s=0
  for i in range(n):
    x,y=random(),random()
    if y<=f(x):
      s=......
      plt.color(255,0,0)
    else:
      plt.color(0,255,0)
    plt.plot(x,y,".")
  plt.text_at(1,str(s/n),"center")
  plt.show_plot()
```

4. Vérifier votre calcul en utilisant l'outil calculs accessible dans [2nde] [trace] (calculs f4). puis dans la page de calculs.

1. Fonction f

x² s'écrit en Python **x**2**. (* correspond à la multiplication).

```
ÉDITEUR : MONTECAR
LIGNE DU SCRIPT 0004
def f(x):
  y=x**2
  return y
```

```
PYTHON SHELL
>>> # Shell Reinitialized
>>> # L'exécution de MONTECAR
>>> from MONTECAR import *
>>> f(1)
1
>>> f(1.5)
2.25
```

On obtient $f(1) = 1^2 = 1$ ainsi que $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

2. Fonction graphe

cls permet d'effacer l'écran ; **window** définit les valeurs extrêmes de la fenêtre ; **axes** affiche les axes (Ox) et (Oy) ; **plot** affiche un point, ici de coordonnées **(i/500;f(i/500))** ; **color** change la couleur en bleu (code **rgb** 0,0,255) et enfin on affiche les segments manquants encadrant la surface d'étude à l'aide de l'instruction **line**.

Toutes ces instructions sont accessibles dans [math] **ti_plotlib**.

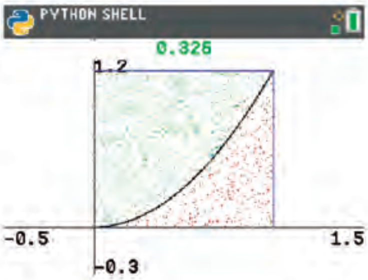
```
import ti_plotlib as plt
def graphe():
  plt.cls()
  plt.window(-0.5,1.5,-0.3,1.2)
  plt.axes("on")
  for i in range(500):
    plt.plot(i/500,f(i/500),".")
  plt.color(0,0,255)
  plt.line(0,1,1,1,"")
  plt.line(1,1,1,0,"")
```

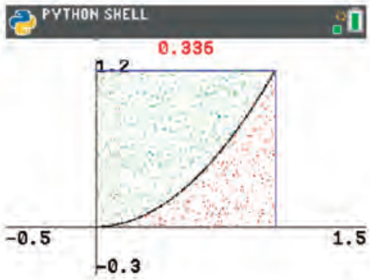
Méthode de Monte-Carlo

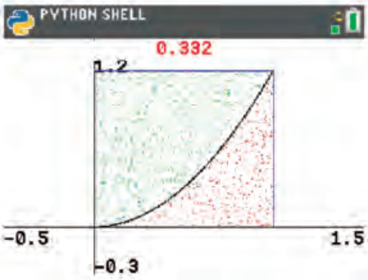
3. Algorithme Monte-Carlo

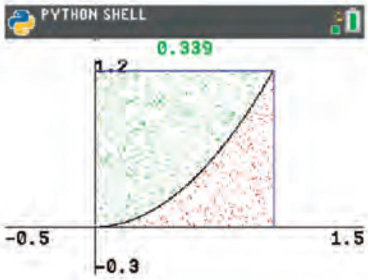
s dénombre les points situés à l'intérieur de l'aire A (ces points sont en rouge sur les figures ci-dessous). On obtient les valeurs approchées de A suivantes : 0,326 ; 0,336 ; 0,332 et 0,339.

```
from random import *
def mc(n):
  graphe()
  s=0
  for i in range(n):
    x,y=random(),random()
    if y<=f(x):
      s=s+1
      plt.color(255,0,0)
    else:
      plt.color(0,255,0)
    plt.plot(x,y,".")
  plt.text_at(1,str(s/n),"center")
  plt.show_plot()
```



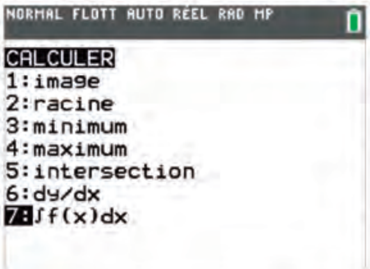






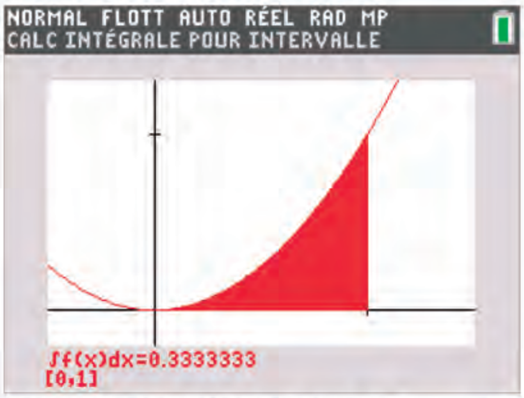
4. Calcul de l'aire

Méthode graphique : On peut obtenir une valeur approchée de l'aire en utilisant la fonction `calcul` de la calculatrice accessible dans [2nde] [trace].

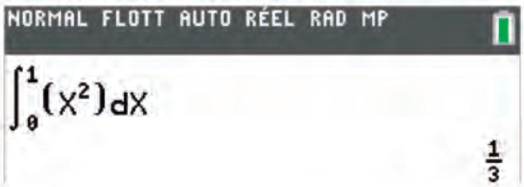


Après avoir choisi `∫f(x)dx` il faut entrer les bornes : 0 (valider en appuyant sur [entrer]), puis 1 (et valider).

On obtient une aire $A = 0{,}333$ ce qui est proche de ce qu'on avait obtenu lors de l'algorithme de Monte-Carlo.



STL : Pour trouver la valeur exacte de l'intégrale, on appuie sur [2nde] [fraction] et on sélectionne le symbole $\int_{\square}^{\square} \square\, d\square$.



Thème: Probabilités.

Marche aléatoire - Casino.

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com – Javon Swaby

On souhaite simuler les gains (et les pertes…) d'un joueur à la roulette.
Le joueur utilise la stratégie suivante : Il mise systématiquement 1€ sur le rouge.

1. Il y a 18 numéros rouges (qui feront gagner 1€ au joueur), 18 numéros noirs (le joueur perd sa mise) et un vert : le 0 où le joueur perd aussi.
Soit X la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) du joueur. Donner la loi de X en complétant le tableau ci-dessous :

x	-1	1
$p(X=x)$		

Quelle est l'espérance de X ? Que signifie ce résultat ?

2. Compléter la fonction Python **jeu** qui renvoie le gain du joueur lors d'un lancer de roulette.

```
ÉDITEUR : ROULETTE
LIGNE DU SCRIPT 0005
from random import *
def jeu():
  a=randint(1,37)
  if a<=18:
    return ...
  else:
    return ...
```

3. On souhaite maintenant simuler **n** fois l'expérience aléatoire précédente et on nomme G le gain total lors de ces **n** expériences.

Compléter la fonction Python **gain** qui prend comme argument **n**, le nombre de jeux, et qui renvoie le gain total (le gain peut-être négatif si le joueur a perdu de l'argent). Lancer la fonction **gain** avec **n=500**.

```
def gain(n):
  g=0
  for i in range(n):
    g=g+....
  return g
```

4. Afin de visualiser l'évolution du gain dans le temps, on va représenter graphiquement le numéro du jeu en abscisse et le gain (cumulé) en ordonnée.
Compléter la fonction Python **graphe** qui prend en argument **n** le nombre total de jeux et qui affiche le nuage de point récherché. Lancer la simulation avec **n=500** plusieurs fois. Quelle tendance semble suivre ces graphiques ?

```
def graphe(n):
  g,xi,yi=0,[],[]
  for i in range(n):
    xi.append(i)
    yi.append(g)
    g=g+jeu()
  plt.cls()
  plt.auto_window(xi,yi)
  plt.axes("on")
  plt.plot(xi,yi,",")
  plt.show_plot()
```

5. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le joueur gagne lors des n jeux.

a) Quelle loi suit Y ?

b) En remarquant que $p\left(Y>\frac{n}{2}\right)$ représente la probabilité d'avoir un gain positif lors des **n** jeux, calculer cette probabilité pour $n=500$ et $n=2000$.

1. Loi de probabilité

Il y a 37 numéros (de 0 à 36). Il y a 18 numéros rouges donc la probabilité de gagner 1€ est donc $p(X=1)=\frac{18}{37}$ et on en déduit que $p(X=-1)=\frac{19}{37}$

x	-1	1
$p(X=x)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$E(X)=1\times p(X=1)+(-1)p(X=-1)=1\times\frac{18}{37}-1\times\frac{19}{37}=-\frac{1}{37}\approx-0{,}027.$
Cela signifie qu'en moyenne à chaque jeu le joueur va perdre 0,027€.

Marche aléatoire - Casino.

2. Fonction `jeu`

```
ÉDITEUR : ROULETTE
LIGNE DU SCRIPT 0007
from random import *
def jeu():
  a=randint(1,37)
  if a<=18:
    return 1
  else:
    return -1
```

`a` est un entier aléatoire compris entre 1 et 37. Il y a 18 numéros rouges, donc `a<=18` représente l'événement « le joueur gagne », il faut donc renvoyer `1` dans ce cas et dans le cas contraire, on renvoie `-1`.

3. Fonction `gain`

La variable `g` représente le gain qui est initialisé à `0`. A chaque tour de boucle, il faut ajouter à `g` le résultat d'un jeu de roulette, ce qui se traduit par l'instruction `g=g+jeu()`.

```
def gain(n):
  g=0
  for i in range(n):
    g=g+jeu()
  return g
```

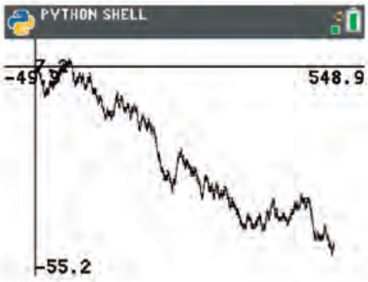
```
PYTHON SHELL
>>> gain(500)
32
>>> gain(500)
-8
>>> gain(500)
-16
>>> gain(500)
-16
>>> gain(500)
-18
>>> |
Fns… | a A # | Outils | Éditer | Script
```

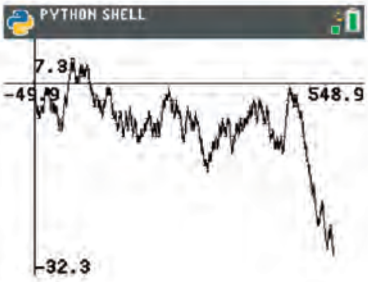
On exécute le script et on lance la fonction gain plusieurs fois. On peut rappeler le nom de la fonction facilement en appuyant sur [var].

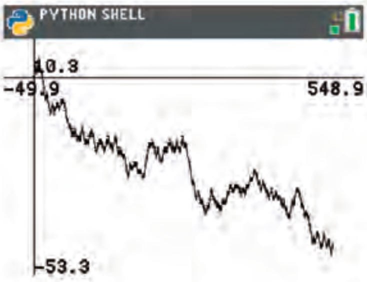
On constate que le joueur a plus souvent de gains négatifs que de gains positifs.

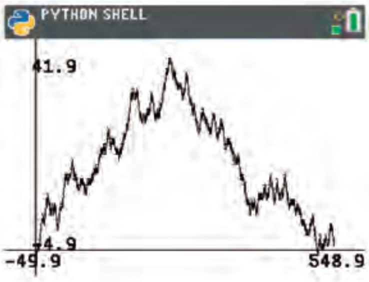
4. Représentation graphique

On lance `graphe(500)` plusieurs fois et on obtient ce type de graphique :









5. Variable gain

a) Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{18}{37}$.

b) Pour avoir un gain positif il faut gagner plus de parties qu'en perdre ! Cela correspond donc à $p\left(Y > \frac{n}{2}\right)$. Pour utiliser la calculatrice on doit effectuer une transformation : $p\left(Y > \frac{n}{2}\right) = 1 - p\left(Y \leq \frac{n}{2}\right)$.

Pour $n = 500$, on calcule $p(Y \geq 250)$ grâce à [2nde] [var] (distrib) et **binomFrep**. On complète la boite de dialogue, de même pour $n = 2000$. On obtient les résultats ci-contre :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
1-binomFRép(500,18/37,250)
                  0.2580167309
1-binomFRép(2000,18/37,10▸
                  0.1090832139
```

Méthode des rectangles

Enoncé

Il existe de nombreuses méthodes pour réaliser une intégration numérique : la méthode des rectangles est une méthode algorithmique permettant d'encadrer l'aire d'un domaine sous une courbe en réalisant une somme de surfaces de rectangles.

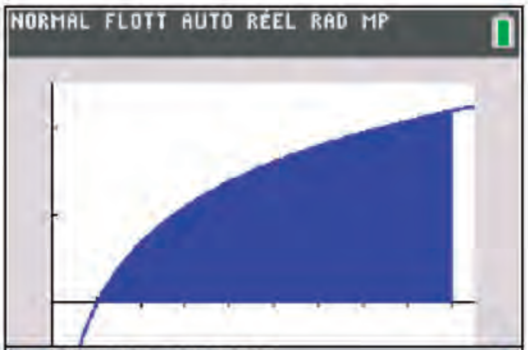
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x)$. On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On cherche à calculer l'aire A délimitée par C_f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 9$. On a représenté cette aire en bleu ci-contre.

1. Le script `AIRERECT` contient la fonction Python **f** qui prend comme argument **x** et qui renvoie **ln(x)**.

Compléter les listes **x** et **y** de la fonction Python **graphe** pour représenter graphiquement la fonction **f** sur l'intervalle $[1;9]$ avec 200 points.

2. Compléter la fonction Python **meth_rect** qui prend comme argument **pas**, et qui affiche les rectangles et les valeurs approchées encadrant l'aire A recherchée. Lancer cette fonction en prenant **pas**=2 puis 1 puis 0,2.

3. Démontrer que la fonction F définie sur $[1\,;9]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction f sur $[1\,;9]$. Vérifier les encadrements de l'aire A obtenus avec les valeurs approchées précédentes en calculant sa valeur à l'aide de la fonction F et de la calculatrice.




```
ÉDITEUR : AIRERECT
LIGNE DU SCRIPT 0008
from math import log as ln
import ti_plotlib as plt

def f(x):
  y=ln(x)
  return y

def graphe():
  plt.cls()
  plt.window(0,10,-0.2,2.5)
  plt.axes("on")
  plt.grid(1,1,"dot")
  x=[...]
  y=[...]
  plt.plot(x,y,".")
Fns… | a A # | Outils | Exéc | Script
```

1. Fonction graphe

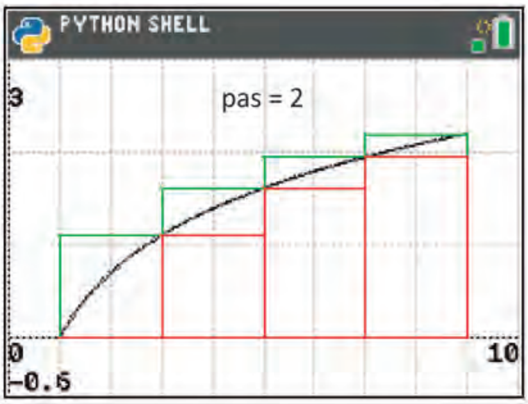
On utilise ici la définition des listes en compréhension c'est-à-dire que l'on définit directement à l'intérieur de la liste la description des éléments souhaités et leur nombre.

cls permet d'effacer l'écran ; **window** définit les valeurs extrêmes de la fenêtre ; **axes** affiche les axes (Ox) et (Oy) ; **grid** affiche les graduations ; **plot** affiche un tracé continu à partir des listes de coordonnées des points, ici les 200 points de coordonnées **(1+i/25;f(1+i/25))**.

```
  x=[1+i/25 for i in range(200)]
  y=[f(i) for i in x]
```

2. Fonction meth_rect

```
ÉDITEUR : AIRERECT
LIGNE DU SCRIPT 0025
def meth_rect(pas):
  x,Sinf,Ssup=1,0,0
  while x<9:
    #rectangle supérieur
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x] #abscisses des sommets
    y_r=[0,f(x+pas),f(x+pas),0,0] #ordonnées des sommets
    plt.color(0,255,0) #vert
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Ssup=Ssup+...
Fns… | a A # | Outils | Exéc | Script
    #rectangle inférieur
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x]
    y_r=[0,f(x),f(x),0,0]
    plt.color(255,0,0) #rouge
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Sinf=...+...
    x=...
  plt.color(255,0,0)
  plt.text_at(1,"Sinf="+str(Sinf),"center")
  plt.color(0,255,0)
  plt.text_at(2,"Ssup="+str(Ssup),"center")
  plt.show_plot()
```



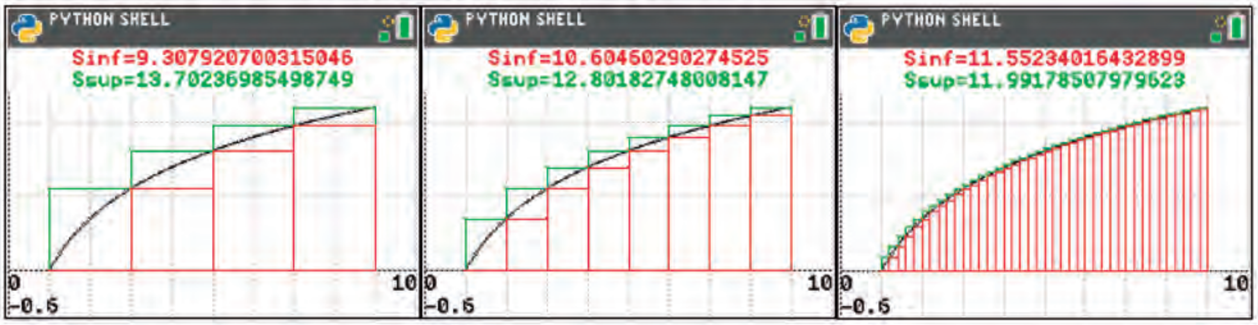
Méthode des rectangles

Sinf et **Ssup** représente les valeurs approchées (inférieure et supérieure de l'aire A recherchée : à chaque itération nous devons donc rajouter l'aire du rectangle suivant et augmenter **x** d'un pas (ci-contre) : **color** change la couleur en rouge (code **rgb** 255,0,0) ou en vert (code **rgb** 0,255,0).

```
    Ssup=Ssup+f(x+pas)*pas
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x]
    y_r=[0,f(x),f(x),0,0]
    plt.color(255,0,0)
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Sinf=Sinf+f(x)*pas
    x=x+pas
```

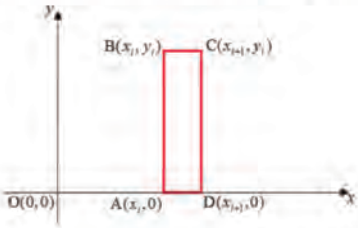
Toutes ces instructions sont accessibles dans math choix 5:**ti_plotlib**.

On obtient alors les résultats suivants avec **pas**=2 puis 1 puis 0,2 :



L'aire A vérifie toujours : **Sinf** $< A <$ **Ssup** .

Remarque : pour tracer un rectangle ABCD à l'aide de la bibliothèque **matplotlib** de Python, on utilise l'instruction **plot** avec les listes des coordonnées de A, B, C, D et A. On termine par A pour fermer le tracé.



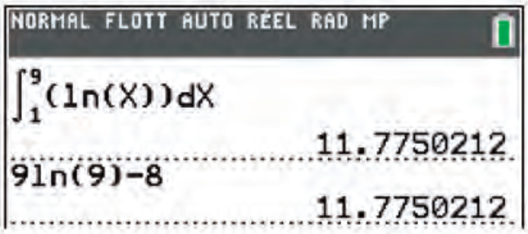
3. Calcul de l'aire

Méthode utilisant une primitive : on calcule la dérivée de la fonction F.

On a $F'(x) = \left(1 * \ln(x) + x * \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x)$ pour tout réel $x \in [1\,;9]$, donc la fonction F est bien une primitive de f sur $[1\,;9]$.

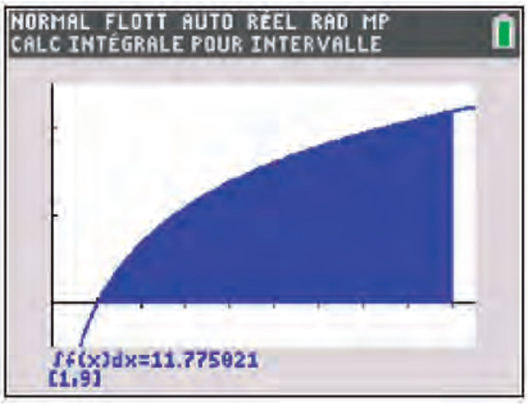
Ainsi $A = \int_1^9 f(x)\,dx = F(9) - F(1) = 9\ln(9) - 8$ soit $A \approx 11{,}775$.

On appuie sur 2nde $\frac{\square}{\square}$ et on sélectionne $\int_{\square}^{\square} \square \, d\square$



Méthode graphique : On peut obtenir une valeur approchée de l'aire en utilisant le menu calculs de la calculatrice accessible avec 2nde trace choix 7: ∫f(x)dx. On entre successivement les bornes 1 puis 7 (valider en appuyant sur entrer).

On obtient une aire $A \approx 11{,}775$ ce qui correspond bien à une valeur vérifiant les encadrements de la question 2°).



Primitive, Aire et Volume

Enoncé

Crédit photo : www.pexels.com

La plupart des stations de ski construisent des retenues d'eau en altitude afin d'alimenter les canons à neige placés le long des pistes réalisant ainsi un enneigement artificiel. La surface qu'il est possible de recouvrir en neige artificielle dépend du volume d'eau stockée dans la retenue. Il faut environ un volume de 4 000 m³ d'eau pour couvrir de neige et rendre skiable une surface d'un hectare.

Une station a décidé de réaliser un bassin d'une profondeur telle que le volume d'eau contenu présente une hauteur h maximale de 8 m. L'objectif est de déterminer si la quantité d'eau liquide retenue dans le bassin lorsque celui-ci est rempli permet de couvrir de neige une surface de 14 hectares.

Au niveau du sol, le tour du bassin peut être modélisé par la courbe fermée représentée sur la figure 1 ci-contre (1 unité correspond à 15 m). Il présente deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 4$. Il est obtenu par symétrie de la la courbe C_f tracée en pointillés, représentative de la fonction f définie pour tout réel sur l'intervalle $[0\,;4]$ par : $f(x) = -(x^2 - 3{,}8x + 1{,}8)e^{-x} + 1{,}8$. Sur l'intervalle $[0\,;4]$, on admet que la fonction f est positive.

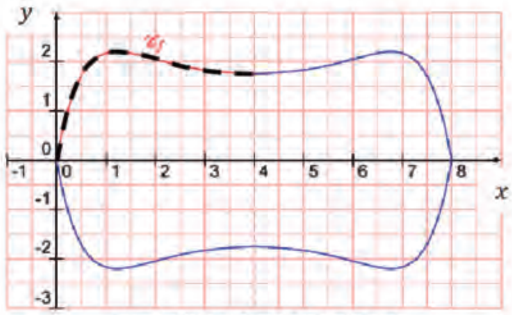


Figure 1 : tour du bassin au niveau du sol

1. a. Montrer que la fonction f admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie pour tout réel x par : $F(x) = (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8x$.

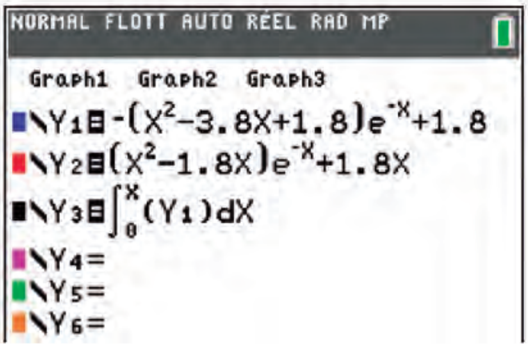
   b. En exploitant la symétrie du bassin, calculer la surface S du bassin au niveau du sol exprimée en m². Arrondir au m² près.

2. On admet que le volume d'eau dans le bassin dépend de la surface S du bassin au niveau du sol précédemment calculée et de la hauteur d'eau h qui y est contenue.

Plus précisément, pour une hauteur d'eau h, le volume V, mesuré en m³ est donné par la relation suivante : $V(h) = \left(\frac{(24+h)^3}{3072} - \frac{9}{2}\right)S$. Indiquer si l'eau contenue dans le bassin complètement rempli permet de recouvrir une surface d'un domaine skiable de 14 hectares en neige artificielle.

1.a. Primitive de f

Tout d'abord nous allons vérifier à l'aide de la calculatrice si la fonction F définie par $F(x) = (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8x$ peut effectivement être une primitive de f. Pour cela, dans le menu f(x) nous saisissons la fonction f dans Y_1 et la fonction F dans Y_2.

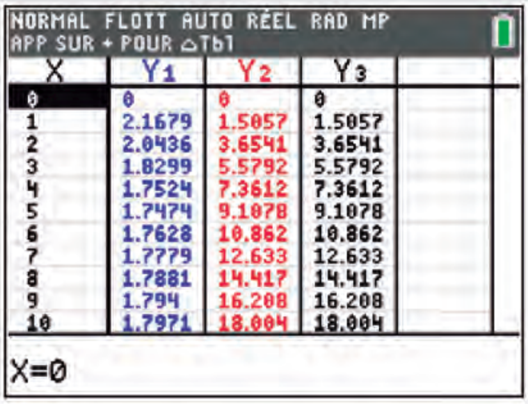


En remarquant ensuite que $F(0) = 0$ nous saisissons alors la primitive de f qui s'annule en 0 dans Y_3. On utilise les touches 2nde puis on accède à la fonction Y_1 avec la touche var grâce à l'onglet **VAR Y** choix `1:Fonction`.

Primitive, Aire et Volume

Enfin nous affichons la table des valeurs de ces fonctions à l'aide des touches 2nde graphe (table f5). Les fonctions Y_2 et Y_3 semblent donc bien égales.

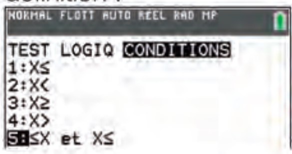
Par calcul, à l'aide des formules de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$ on obtient $F'(x) = (2x - 1{,}8)e^{-x} - (x^2 - 1{,}8x)e^{-x} + 1{,}8$ soit $F'(x) = -(x^2 - 3{,}8x + 1{,}8)e^{-x} + 1{,}8 = f(x)$ ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f.

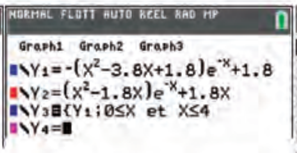


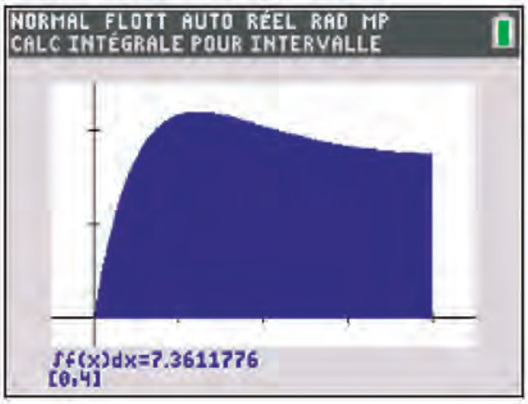
1.b. Calcul d'aire

On peut calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe de la fonction f sur $[0\,;4]$ en utilisant le menu `calculs` de la calculatrice avec 2nde trace (calculs f4). Après avoir choisi 7: **∫f(x)dx** on entre les bornes 0 puis 4 (valider en appuyant sur entrer).

On aura auparavant créer la fonction f restreinte à l'intervalle $[0\,;4]$ dans Y_3 grâce à la touche math choix **B:parmorceaux** avec un morceau et grâce à 2nde math (tests A) on rajoute les conditions pour respecter l'intervalle de définition :







On obtient une aire d'environ 7,36 unités d'aire.

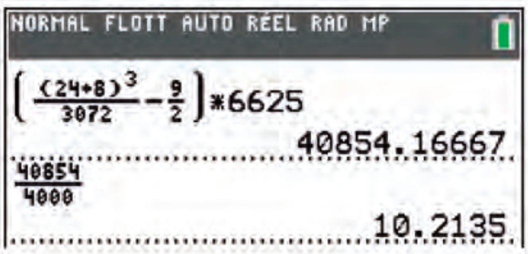
Pour retrouver la valeur de cette aire, on peut calculer l'intégrale de la fonction f à l'aide des touches 2nde $\frac{□}{□}$.

Ainsi, grâce à la symétrie du bassin au niveau du sol, le quart de sa surface est, en unités d'aire, $\frac{S}{4} = \int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0)$. En tenant compte de l'unité d'aire égale à $15 \times 15\,m^2$ soit $225\,m^2$, la surface en m^2 vaut $S \approx 6\,625\,m^2$ à l'unité près.

2. Calcul de volume

Si le bassin est complètement rempli, la hauteur d'eau est égale à 8 m et le volume contenu dans le bassin est de :

$V(8) = \left(\frac{(24+8)^3}{3072} - \frac{9}{2}\right)S \approx 40\,854\,m^3$. Ainsi puisqu'il faut environ un volume de $4\,000\,m^3$ d'eau pour couvrir de neige et rendre skiable une surface d'un hectare, le bassin rempli permettra de recouvrir environ 10,2 hectares en neige artificielle ce qui ne suffira pas pour le domaine skiable de 14 hectares.



Equation différentielle linéaire du 1er ordre

Enoncé


Crédit photo : www.pexels.com – Meruyert Gonullu

Un tramway de masse 2 000 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 3125 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire avec un coefficient de proportionnalité égal en valeur absolue à 250 N.m^{-1}.s.

La position du tramway est repérée par la distance x, en mètres, à partir d'un point d'origine, en fonction du temps t exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) : $250v + 2000v' = 3125$, où v est la vitesse du tramway définie par $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

   b. Calculer $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

2. On souhaite commencer à freiner le tramway lorsque sa vitesse dépasse 90% de sa valeur limite V.

   a. A quel instant cela correspond-t-il (arrondir à 0,1 seconde près) ?

   b. A quelle distance du départ cela se produit-il ?

1.a. Vitesse en fonction de t

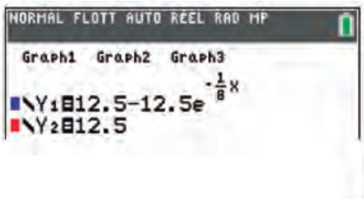
On sait que pour tout $t \in [0;+\infty[$ la fonction v est solution de l'équation $250v + 2000v' = 3125 \Leftrightarrow v' = -\frac{1}{8}v + \frac{25}{16}$. L'équation différentielle (E) est du type $y' = ay + b$, d'après le cours elle possède une solution particulière constante $-\frac{b}{a}$ et les solutions sont $v(t) = Ke^{-\frac{1}{8}t} + 12{,}5$ où $K \in \mathbb{R}$. Sachant que $v(0) = 0$ on trouve $K = -12{,}5$ d'où $v(t) = 12{,}5 - 12{,}5\,e^{-\frac{1}{8}t}$ pour $t \geq 0$.

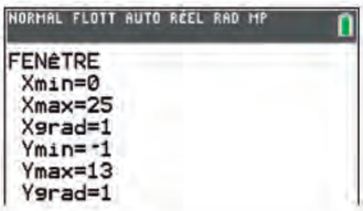
1.b. Vitesse limite

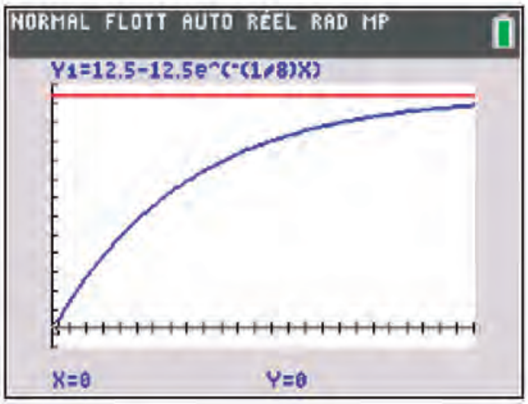
Utilisons les limites de la fonction exponentielle pour déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ par composée donc $V = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 12{,}5$.

On peut visualiser ces résultats sur le graphique de la calculatrice.

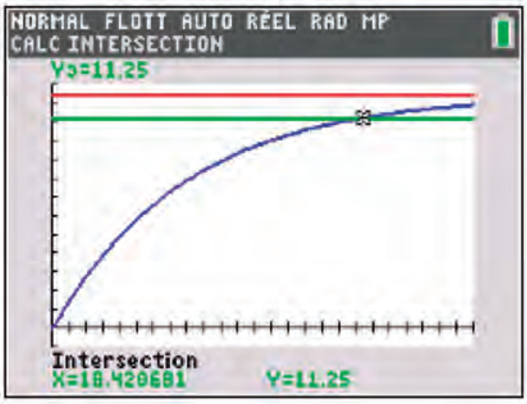






Equation différentielle linéaire du 1er ordre

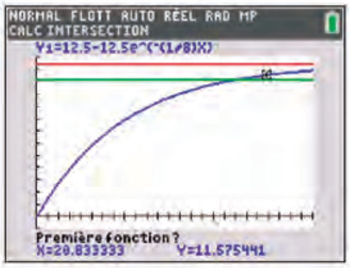
2.a. Instant de freinage

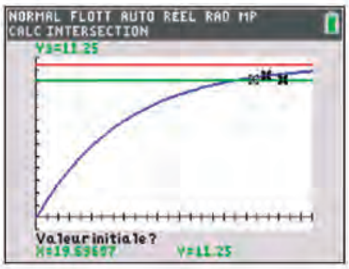


Il faut résoudre l'inéquation $v(t) \leq 12{,}5 \times \frac{90}{100} \Leftrightarrow v(t) \leq 11{,}25$.

D'une part on peut tracer la droite d'équation $y = 11{,}25$ (en vert) et chercher graphiquement l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe représentant la fonction v (en bleu).

Pour cela on sélectionne le menu `calculs`, à l'aide des touches 2nde trace et on sélectionne la commande `5:intersection`. De retour au graphique, on valide avec entrer le choix de Y_1, celui de Y_3 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché. On trouve $t \approx 18{,}4$.





D'autre part on peut résoudre l'inéquation par le calcul avec l'outil ln :

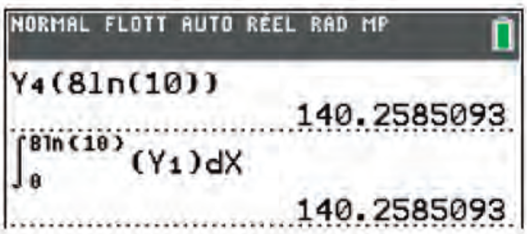
$12{,}5 - 12{,}5\, e^{-\frac{1}{8}t} \leq 11{,}25 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{8}t} \geq 0{,}1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}t \geq \ln(0{,}1) \Leftrightarrow t \leq 8\ln(10)$.

On trouve bien un temps d'environ 18,4 secondes pour le début du freinage.

2.b. Distance parcourue

On sait que $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, ainsi la fonction distance est une primitive de la fonction vitesse.

Puisque $v(t) = 12{,}5 - 12{,}5\, e^{-\frac{1}{8}t}$, on trouve $x(t) = 12{,}5t + 100\, e^{-\frac{1}{8}t} + C$ où $C \in \mathbb{R}$. Or $x(0) = 0$, on détermine alors $C = -100$ donc $x(t) = 12{,}5t + 100\, e^{-\frac{1}{8}t} - 100$ pour tout $t \geq 0$.



On entre alors cette fonction dans Y_4 à l'aide du menu f(x) et on calcule l'image de $8\ln(10)$ en sélectionnant Y_4 via les touches alpha trace choix 4.

On peut aussi calculer l'intégrale de la fonction v entre les instants 0 et $8\ln(10)$ en sélectionnant 2nde $\frac{\square}{\square}$ $\int_{\square}^{\square}\square\, d\square$.

On trouve dans les 2 cas une distance parcourue par le tramway d'environ 140 mètres avant le début du freinage.

STI2D
STL

Thème: Lien avec la physique-chimie

Loi de décroissance radioactive

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Enoncé

On note $A(t)$ l'activité d'un échantillon radioactif en becquerel (Bq) à l'instant t exprimé en seconde.

Rappel : 1 Bq correspond à une désintégration par seconde.

On note N le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t. On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t)$ et $A(t) = -\frac{dN}{dt}(t)$ avec λ une constante positive, appelée constante radioactive, exprimée en s^{-1} qui est différente selon chaque noyau radioactif.

1°) En notant N_0 la valeur de $N(0)$ et A_0 la valeur de $A(0)$, exprimer $N(t)$ en fonction de N_0, λ et t puis exprimer $A(t)$ en fonction de A_0, λ et t.

2°) Représenter sur un même graphiquement la fonction N pour les valeurs de N_0 suivantes : $100, 150$ et 200 et en prenant $\lambda = -0{,}1$. On règlera la fenêtre en prenant les paramètres ci-contre.

```
FENÊTRE
 Xmin=0
 Xmax=20
 Xgrad=1
 Ymin=-20
 Ymax=250
 Ygrad=50
```

3°) On appelle demi-vie, la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux radioactifs initialement présents sont désintégrés. On la notera τ. Pour chacune des courbes de la question 2. Calculer la valeur de la demi-vie.

4°) Montrer que τ s'exprime en fonction de λ.

5°) Pour déterminer la date d'origine d'une vieille épave découverte en mer baltique, on procède à une datation au carbone 14. On sait que pour 1 gramme de carbone présent dans l'atmosphère son activité est $A_0 = 13{,}6$ désintégration par seconde.

a) Sachant que la demi-vie du carbone 14 est 5730 ans, calculer λ.

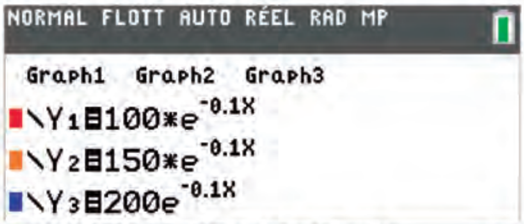
b) Sur l'épave on a relevé une valeur de $A = 12$. En déduire l'âge de l'épave.

1. Expression de $A(t)$ et $N(t)$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t)$ donc d'après le cours $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$.

De plus $A(t) = -\frac{dN}{dt}(t) = -N_0(-\lambda e^{-\lambda t}) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$. Sachant que :
$A(0) = \lambda N_0 e^{-\lambda \times 0} = \lambda N_0$ qu'on note A_0 on obtient : $\boldsymbol{A(t) = A_0 e^{-\lambda t}}$

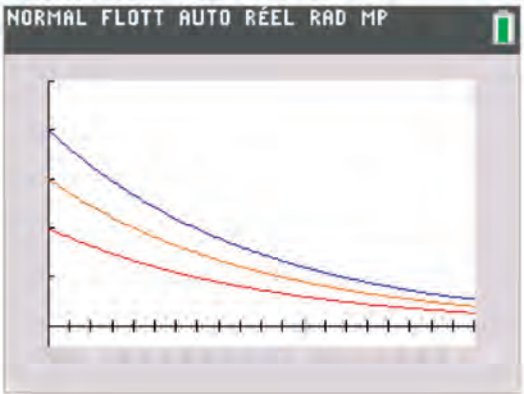
2. Représentation graphique



Pour entrer les expressions des fonctions on appuie sur [f(x)].

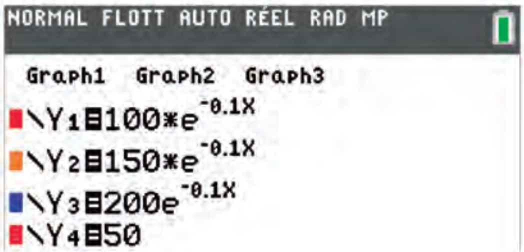
On paramètre la fenêtre comme indiqué dans l'énoncé en appuyant sur [fenêtre]

On obtient la représentation graphique ci-contre :



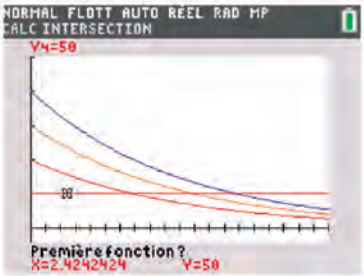
Loi de décroissance radioactive

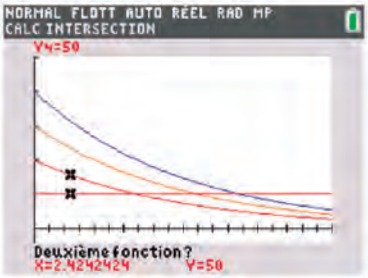
3. Demi vie

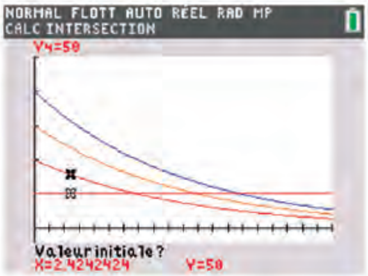


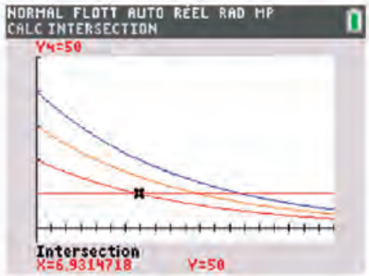
Pour trouver la demi-vie de la fonction représentée en rouge ($N_0 = 100$) on trace la droite d'équation $y = 50$ et on va chercher l'abscisse du point d'intersection de cette droite et de la courbe rouge.

Pour cela on appuie sur [f(x)] pour entrer l'expression de la droite puis on choisit [2nde] [trace] (calculs) et **intersection**. On sélectionne la courbe rouge et on valide (en appuyant sur [entrer]) puis on sélectionne notre droite et on valide ainsi que pour la valeur initiale.

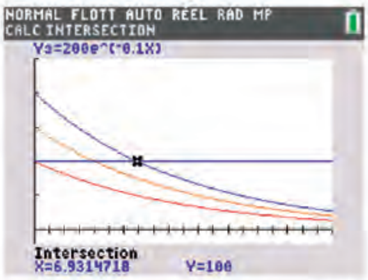


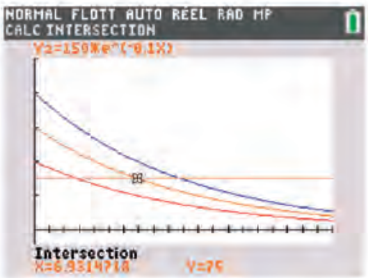






On fait de même pour les deux autres fonctions en traçant les droites d'équation $y = 75$ puis $y = 100$. On trouve les résultats suivants :





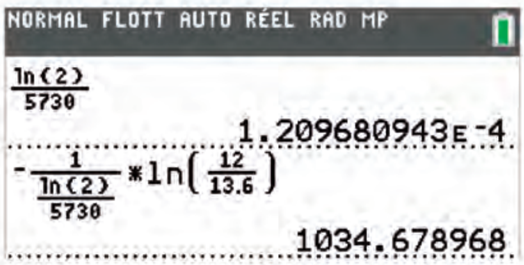
Dans tous les cas on trouve toujours les mêmes résultats : $x \approx 6{,}93$

4. Expression de τ

Par définition τ vérifie $N(\tau) = \frac{N_0}{2}$ soit $N_0 e^{-\lambda\tau} = \frac{N_0}{2}$ ainsi $e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$ d'où

$-\lambda\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui nous donne $-\lambda\tau = -\ln 2$ et donc $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$

5. Datation au ^{14}C



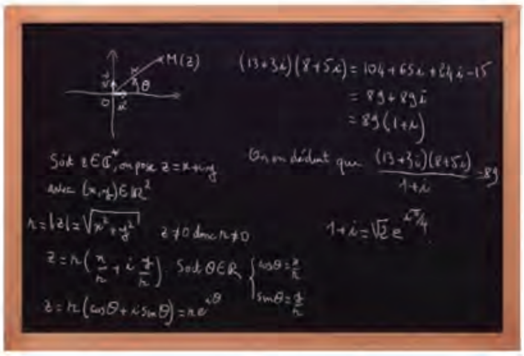
a) On sait que $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ donc $5730 = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ainsi $\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$.

b) Pour tout réel positif t on a $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ avec $A_0 = 13{,}6$ d'après l'énoncé. Ainsi on cherche t tel que $12 = 13{,}6 e^{-\lambda t}$.

Cela nous donne donc $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{12}{13{,}6}\right) \approx 1035$. L'épave date environ de 1035 ans.

Forme algébrique, trigonométrique

Enoncé



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{12+16i}{7+i}$ et $z_2 = -2+2i$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

   En déduire que z_2^4 est un réel que l'on déterminera.
3. Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

   $z_A = 2+2i,\ z_B = -2+2i$ et $z_C = 4i$

   Monter que le triangle ABC est rectangle isocèle.

1. Forme algébrique

On a $z_1 = \frac{12+16i}{7+i}$, pour déterminer la forme algébrique de z_1 il faut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, soit $7-i$. Ainsi :

$$z_1 = \frac{(12+16i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{12\times 7 - 12i + 16\times 7i - 16i^2}{49+1} = \frac{84-12i+112i+16}{50} = \frac{100+100i}{50} = \frac{50(2+2i)}{50}$$

Ce qui nous donne $z_1 = 2+2i$.

On vérifie nos calculs à l'aide de la calculatrice. Le nombre complexe i est obtenu en appuyant sur 2nde [.].

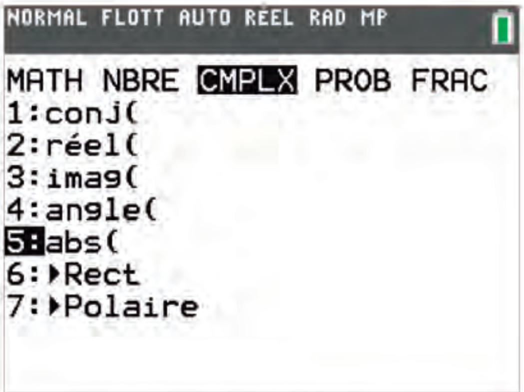
2. Forme exponentielle

On a $z_2 = -2+2i$. Commençons par calculer le module de z_2 :

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Vérifions notre calcul en appuyant sur [math] puis onglet **CMPLX** et choisir **abs**

Puis on entre $-2+2i$.



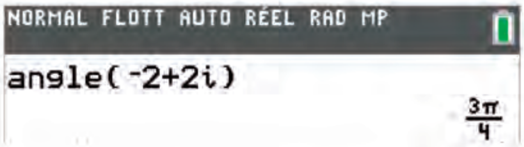
On peut aussi utiliser la touche 2nde [$\frac{\square}{\square}$] puis choisir [$|\square|$] :

Forme algébrique, trigonométrique

Déterminons maintenant un argument de z_2 :

On a $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

On reconnait la ligne trigonométrique $\frac{3\pi}{4}$: $\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



On peut vérifier ce résultat à l'aide de l'instruction **angle** accessible dans math onglet **CMPLX** :

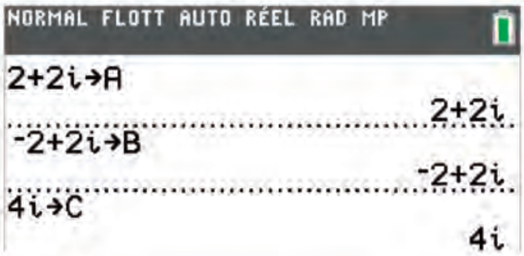
Ce qui nous donne :

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

d'où $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

On peut aussi vérifier ce dernier résultat en convertissant notre nombre complexe à l'aide de l'instruction **Polaire** :

3. Interprétation géométrique



Calculons $AB = |z_B - z_A| = |-2 + 2i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i - 2 - 2i|$

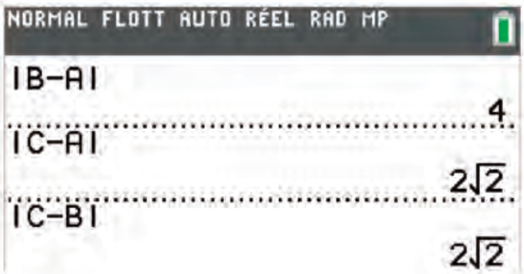
On a donc $AB = |-4| = 4$

D'autre part $AC = |z_C - z_A| = |4i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$

Ce qui nous donne $AC = \sqrt{8}$.

Et enfin $BC = |z_C - z_B| = |4i - (-2 + 2i)| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2}$

D'où $BC = \sqrt{8}$.



On vérifie nos calculs en affectant aux variables **A**, **B** et **C** de notre calculatrice TI les affixes respectives z_A, z_B et z_C. Puis on calcule les différents modules comme ci-contre.

On vient de voir que $AC = BC = \sqrt{8}$, le triangle ABC est donc isocèle en C.

Montrons maintenant que le triangle ABC est un triangle rectangle :
On a $AC^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16$ et $AB^2 = 4^2 = 16$.

Ainsi on obtient l'égalité $AC^2 + BC^2 = AB^2$, ce qui prouve, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

Plus d'informations sur le site internet de T3 France :

- Des ressources pédagogiques pour votre classe
- Un programme de formations gratuites sur site et en ligne
- Des vidéos d'aide à la prise en main de la technologie

t3france.fr

Un service après-vente est également accessible depuis le site **education.ti.com/fr/csc**