∽ Baccalauréat STI2D & STL/SPCL ∾
Métropole – La Réunion – 8 septembre 2020

Exercice 1 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
   Le point A a pour affixe $z_{\text{A}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$ et le point B a pour affixe $z_{\text{B}} = 2\,\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   a. Les points A et B sont confondus.
   b. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
   c. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses du repère.
   d. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées du repère.
2. Une forme exponentielle de $2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} \times 2\text{i}$ est :
   a. $4\,\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$
   b. $4\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$
   c. $4\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$
   d. $4\,\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$
3. La valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \left(\text{e}^{x} + 1\right)\,\text{d}x$ est :
   a. 2
   b. $\text{e}^2 - 1$
   c. $\text{e}^2 + 1$
   d. $\text{e}^2 + 2$
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-2x} + 10$.
   Cette fonction g est une solution de l'équation différentielle :
   a. $y' = y$
   b. $y' + 2y = 0$
   c. $y' - 2y = 10$
   d. $y' + 2y = 20$

Exercice 2 6 points

Léo envisage l'achat d'un téléphone portable dont la capacité de stockage est de 32 giga- octets (Go). Selon la notice, la configuration initiale du téléphone nécessite 20 % de cette capacité pour le système d'exploitation.

1. Calculer le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation après la configuration initiale du téléphone.

En raison des différentes mises à jour, Léo estime que le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation augmente de 0,5 % par mois.

2. On note u_0 le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation après la configuration initiale de son téléphone. Ainsi $u_0 = 6,4$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation, n mois après la configuration initiale du téléphone.

- **a.** Montrer que $u_1 = 6,432$. Interpréter le résultat.
- **b.** Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- **c.** Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
- **d.** Calculer le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation 2 ans après la configuration initiale du téléphone.

Léo estime que pour utiliser son téléphone dans de bonnes conditions, celui-ci doit disposer d'une capacité de stockage disponible d'au moins 4 Go.

- **e.** Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inéquation

$$6,4 \times 1,005^n > 28.$$

  Indiquer la démarche utilisée.
- **f.** Interpréter le résultat précédent.

Léo estime que, chaque mois, les nouvelles photos et les nouveaux messages occuperont 450 mégaoctets (Mo) supplémentaires. Il décide de ne rien supprimer.

3. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de gigaoctets utilisés par le système d'exploitation, les photos et les messages au bout de n mois après la configuration initiale du téléphone.

Ainsi $v_0 = 6,4$.

- **a.** Justifier que $v_n = 6,4 \times 1,005^n + 0,45n$.
- **b.** Calculer le nombre de gigaoctets utilisés 2 ans après la configuration initiale du téléphone.
- **c.** Léo écrit l'algorithme suivant.

$n \leftarrow 0$
$v \leftarrow 6,4$
Tant que $v \leqslant 28$
  $n \leftarrow n+1$
  $v \leftarrow 6,4 \times 1,005^n + 0,45n$
Fin Tant que

  Que représente le contenu de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
- **d.** On rappelle que, pour être utilisé dans de bonnes conditions, le téléphone doit disposer d'une capacité de stockage disponible d'au moins 4 Go.

  Au bout de combien de mois le téléphone de Léo n'aura-t-il plus suffisamment de capacité de stockage ?

4. Pour un téléphone d'une capacité de stockage de 64 Go, on admet que la configuration initiale nécessite 10 Go.

Avec une telle capacité de stockage, Léo pourra -t-il utiliser ce téléphone dans de bonnes conditions deux fois plus longtemps que le modèle de 32 Go ?

Exercice 3 — 5 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une voie de chemin de fer relie deux gares A et B sur une distance de 360 kilomètres.

La gare A est située au kilomètre 0 et la gare B est située au kilomètre 360.

Partie A

Sur cette voie de chemin de fer circule une locomotive destinée au transport de marchandises.

Cette locomotive peut tomber en panne entre les gares A et B.

Lorsque cela se produit, la distance, en kilomètre, entre la gare A et le lieu où la locomotive tombe en panne est une variable aléatoire notée D.

On admet que D suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,360]$.

1. Déterminer $P(D=50)$.

2. Cette voie de chemin de fer passe dans un tunnel dont l'entrée est située à 10 km de la gare A et la sortie à 15km de la gare A.

Calculer la probabilité que la locomotive tombe en panne dans ce tunnel.

3. La probabilité que la locomotive tombe en panne avant le kilomètre 200 est-elle le double de la probabilité qu'elle tombe en panne avant le kilomètre 100 ?

Partie B

Sur une période donnée de quatre semaines complètes, on s'intéresse aux trains de voyageurs sur la même voie partant de la gare A et arrivant avec un léger retard en gare B, c'est-à-dire avec un retard de moins de 10 minutes. On suppose que de tels légers retards sont tous indépendants les uns des autres.

La probabilité qu'un train arrive avec un léger retard est estimée à $0,02$.

De la gare A à la gare B, il y a 16 trajets par jour du lundi au vendredi, 12 trajets le samedi et 8 le dimanche.

1. Vérifier que sur cette période de quatre semaines complètes, 400 trains circulent sur cette voie de la gare A vers la gare B.

Sur cette voie, le nombre de trains en léger retard sur la période considérée est une variable aléatoire notée X.

2. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

a. Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 trains arrivent en léger retard sur cette période.

3. On décide d'approcher la loi binomiale précédente par la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2,8$.

a. Justifier le choix des paramètres μ et σ.

b. En utilisant l'approximation choisie, calculer la probabilité $P(4 \leqslant X \leqslant 12)$.

c. Déterminer la probabilité qu'il y ait, sur ce trajet, au moins 4 trains en léger retard sur la période considérée.

4. Durant ces quatre semaines complètes, 11 trains ont été en léger retard sur ce trajet.

Cette observation remet-elle en cause le pourcentage de trains ayant un léger retard estimé à 2 % ?

On utilisera un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

On rappelle que l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

lorsque la proportion p dans la population est connue.

Exercice 4 — 5 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à l'unité

Un signal Wi-Fi est émis avec une puissance de 20 décibels-milliwatt (dBm).

L'atténuation de la puissance du signal dépend :

- de la fréquence F du signal, exprimée en gigahertz (GHz),
- de la distance D, en mètre, parcourue par ce signal,
- des matériaux traversés.

Pour une distance D supérieure ou égale à 1 mètre et en l'absence d'obstacle, cette atténuation, exprimée en dBm, est donnée par la formule

$$32,35 + 8,7\ln(F \times D)$$

La fréquence F du signal émis est égale à $2,4$ GHz.

1. Montrer qu'une approximation de l'atténuation de la puissance du signal peut être donnée par $A = 40 + 8,7\ln(D)$.

2. **a.** Déterminer A pour une distance D de 10 mètres.

b. Pour quelle distance D la valeur A est-elle de 80 dBm ?

3. Une valeur approchée P de la puissance du signal, en décibel-milliwatt, à une distance D de l'émetteur est donnée par $P = 20 - A$.
Justifier que $P = -20 - 8,7\ln(D)$.

Dans la suite de l'exercice, la puissance du signal, en dBm, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,400]$ par

$$f(x) = -20 - 8,7\ln(x)$$

où x est la distance, en mètre, parcourue par le signal.
Lorsque l'unité utilisée est le dBm, la puissance d'un signal est un nombre négatif.

4. **a.** Déterminer la fonction f', dérivée de la fonction f, sur l'intervalle $[1\,;\,400]$.

b. Étudier le signe de $f\,i$ sur l'intervalle $[1\,;\,400]$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

5. **a.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,400]$, $f(2x) = f(x) - 8,7\ln(2)$.

b. Lorsque la distance parcourue par le signal est doublée, de combien de décibels- milliwatt la puissance du signal diminue- t-elle ?

6. Le tableau suivant indique la qualité du signal en fonction de sa puissance.

Puissance du signal	Qualité du signal
Supérieure à -50 dBm	Excellente
Comprise entre -60 et -50 dBm	Bonne
Comprise entre -70 et -60 dBm	Moyenne
Inférieure à -70 dBm	Faible

a. Quelle est la qualité du signal lorsqu'il a parcouru 10 mètres ?

b. Résoudre l'équation $f(x) = -60$.

c. En déduire la distance maximale pour laquelle la qualité de signal est bonne.