Durée : 4 heures

Baccalauréat STI2D - Antilles–Guyane 10 septembre 2019

Exercice 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

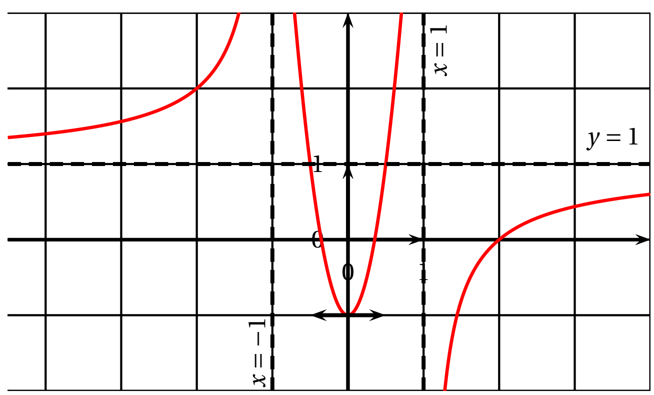
1. On considère une fonction f dont le tableau de variations et le tableau de signes sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

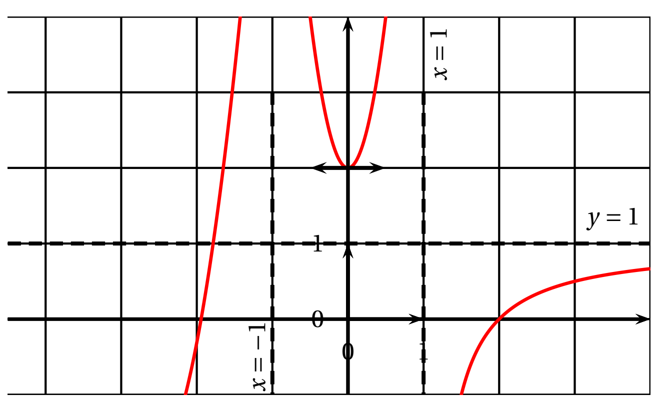
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Une courbe susceptible de représenter la fonction f est :

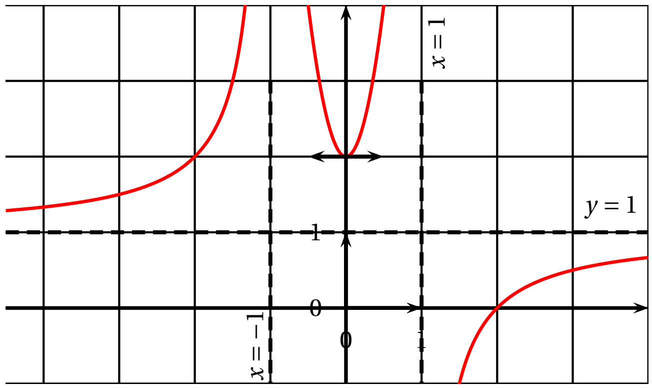
a.



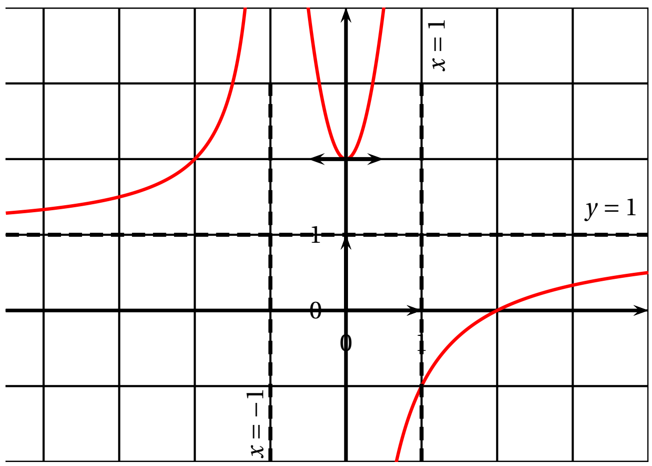
b.



c.



d.

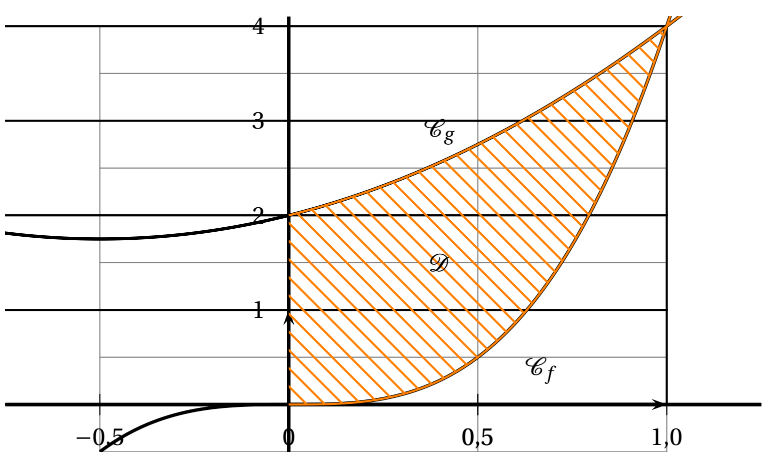


2. On considère f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + x + 2.$$

On note :

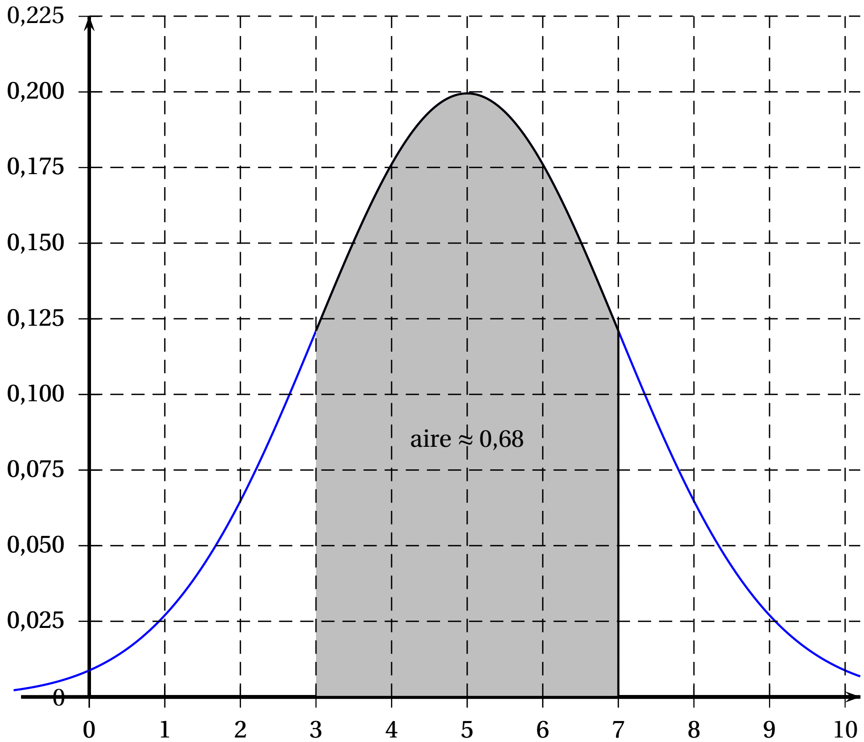
- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.
- $\mathscr{D}$ le domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.



L'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

a. $\dfrac{31}{24}$ **b.** $\dfrac{31}{12}$ **c.** $\dfrac{15}{8}$ **d.** $\dfrac{11}{6}$

3. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ. L'aire du domaine grisé est environ égale à 0,68.



À partir de ce graphique, on en déduit que :

a. $\mu = 2$ et $\sigma = 5$

b. $\mu = 0,2$ et $\sigma = 5$

c. $\mu = 5$ et $\sigma = 1$

d. $\mu = 5$ et $\sigma = 2$

4. Soit a un nombre réel. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[3\,;\,a]$.
On sait que $p(X < 7) = 0,8$.
La valeur de a est :

a. 7,2 **b.** 9 **c.** 8 **a.** 8,2

Exercice 2 **5 points**

Les abeilles assurent la reproduction de plus des trois-quarts des espèces végétales du globe terrestre grâce à la pollinisation. Depuis une dizaine d'années, on constate une diminution du nombre de colonies d'abeilles à cause de l'évolution du climat et de l'utilisation d'insecticides pour protéger certaines cultures.

Partie A

On observe une colonie constituée de 40 000 abeilles. On estime que, dans cette colonie, 1 000 abeilles naissent chaque jour et 500 décèdent chaque jour de manière naturelle.
Déterminer, en justifiant, le nombre de jours nécessaires pour que la population de cette colonie atteigne les 50 000 individus.

Partie B

Après ce premier temps d'observation, un insecticide est régulièrement pulvérisé dans le champ près duquel les abeilles butinent.
On estime alors à 20 % la proportion d'abeilles de la colonie qui décèdent chaque jour à cause de cet insecticide. On suppose que le nombre de naissances et de décès de manière naturelle reste identique (1 000 naissances et 500 décès de manière naturelle). Pour tout entier naturel n, on note un le nombre d'individus de la colonie n jours après le début des pulvérisations de l'insecticide. On a donc $u_0 = 50000$.

1. On modélise cette situation par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 500.$$

Calculer le nombre d'abeilles dans la colonie un jour après le début des pulvérisations.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2500$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 0{,}8v_n$.

b. En déduire la nature de la suite (v_n) et exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 47500 \times 0{,}8^n + 2500$.

3. Des études ont montré qu'une colonie d'abeilles n'est plus en mesure d'assurer sa survie si elle compte moins de 5 000 individus.
La colonie étudiée va-t-elle survivre ? Justifier la réponse.

Partie C

Le but de cette partie est de valider, ou non, la proportion $p = 0{,}2$ d'abeilles qui décèdent chaque jour à cause de l'insecticide.
L'insecticide utilisé ici provoque la désorientation des abeilles, ce qui perturbe leur retour à la colonie et entraîne leur mort.
Un matin, on équipe 500 abeilles de la colonie, de puces électroniques. On constate le lendemain que, dans cet échantillon de 500 abeilles, 102 sont décédées à cause de l'insecticide.
Cette observation est-elle compatible avec l'hypothèse $p = 0{,}2$ au seuil de 95 % ?

On rappelle que lorsque la proportion p dans la population est connue, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n est donné par :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Exercice 3 **7 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.
Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

On dispose des renseignements suivants :

Caractéristiques des bornes de recharge

Type de borne de recharge	Tension (V)	Intensité (A)
Normal	230	16
		32
Semi-rapide	400	16
		32
Rapide	400	63

Document 1

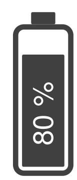
Exemples de capacités de batterie :

- Marque A : 22 kWh
- Marque B : 24 kWh
- Marque C : 33 kWh
- Marque D : 60 kWh

Document 2

Bon à savoir, pour une batterie vide

Après 50 % du temps de charge complète, la batterie est à environ à 80 % de sa capacité de charge.



Document 3

1. La puissance de charge P d'une borne de recharge, exprimée en Watt (W), s'obtient en multipliant sa tension U, exprimée en Volt (V), par son intensité I, exprimée en Ampère (A).

Dans la pratique, on considère que le temps T de charge complète d'une batterie vide, exprimé en heure (h), s'obtient en divisant la capacité C de la batterie, exprimée usuellement en kilowattheure (kWh), par la puissance de charge P de la borne de recharge exprimée en kilowatt (kW).

On considère une batterie de la marque D.

Déterminer le temps de charge complète de cette batterie sur une borne de recharge « Rapide ». Exprimer le résultat en heures et minutes.

2. Lors du branchement d'une batterie vide de marque A sur une borne de recharge de type « Normal », la charge (en kWh) en fonction du temps (en heure) est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}55y = 12{,}1.$$

a. Résoudre cette équation différentielle sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Justifier que $f(0) = 0$.

c. Montrer que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = -22\mathrm{e}^{-0{,}55t} + 22$.

d. La durée de demi-charge est le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(t) = 11$ et en déduire la durée d'une demi-charge, exprimée en heure et minute.

e. Dans la pratique, on considère que le temps de charge complète de ce type de batterie est d'environ 6 heures.

Vérifier l'affirmation du document 3.

Partie B

Une thermistance est un composant électronique dont la résistance varie en fonction de la température et qui est utilisé, entre autres, comme capteur de température.
Afin d'alerter les utilisateurs de cas de surchauffe, on munit les batteries de thermistances.
Un constructeur de thermistances indique que la valeur R, exprimée en Ohm (Ω), de la résistance de celle-ci est donnée, pour des températures θ, exprimées en degré Celsius (°C) et comprises entre 0 °C et 120 °C, par :

$$R = -0{,}04\theta^3 + 7{,}2\theta^2 - 240\theta + 3\,000.$$

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,120]$ par :

$$g(x) = -0{,}04x^3 + 7{,}2x^2 - 240x + 3\,000.$$

1. **a.** Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g.
   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de g sur $[0\,;\,120]$.
   c. En déduire la résistance maximale et la température pour laquelle elle est atteinte.
2. Un message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule lorsque la résistance atteint 5 000 Ω, ce qui signifie que la batterie est trop chaude.
   On cherche la température correspondant à cette valeur.
   a. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, à un degré près, de la température cherchée.
   b. On considère l'algorithme suivant :

```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < …
      x ← x + 1
      y ← …
Fin Tant que
```

   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable x contienne la température cherchée.

Exercice 4 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   a. Écrire z_1 sous forme algébrique.
   b. Vérifier que z_1 est solution de l'équation $(2+\mathrm{i})z = 1 + 3\mathrm{i}$.
2. Écrire le nombre complexe $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.
3. On considère z_3 le nombre complexe de module 4 et d'argument $\dfrac{7\pi}{6}$.
   Vérifier que $z_3 = z_1^2 \times z_2$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.
   a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe représenté en annexe page 10/10 (à rendre avec la copie).
   b. Démontrer que le triangle OBC est rectangle en O.

Annexe de l'exercice 4

À rendre avec la copie