Préparation oral de rattrapage – Série S

Vous venez de télécharger les corrigés... **IMPRIMEZ-LES !**

• Ces corrigés sont **imprimables**, mais vous **ne pourrez pas sauvegarder le fichier**... **Imprimez dès que possible ce document.**

• En cas de problème, envoyez-moi un mail en précisant absolument les codes achetés qui ont permis de télécharger ce fichier.

Réponses aux questions les plus fréquentes

• Voir sur la page d'accueil du site : `http://oral.bac.free.fr`.

• Si vos questions restent sans réponse, envoyez-moi un mail à oral.bac@free.fr : j'essaierai de vous renseigner au plus tôt.

Votre préparation

• Vous avez forcément peu de temps : soyez efficaces et organisez-vous bien pour réviser vos deux matières !

• Ces exemples d'oraux devraient vous simplifier la tâche : tous les points du programme « d'enseignement obligatoire » y sont présents, certains à plusieurs reprises pour faciliter votre mémorisation à court et moyen terme.

Conseils d'organisation

• Pour ne perdre aucun temps, travaillez les oraux sur une journée en vous donnant une quinzaine de minutes pour mettre sur papier vos réponses aux différents exercices proposés, puis lisez la correction. Corrigez par écrit vos erreurs éventuelles, relisez le cours portant sur les points travaillés, puis passez à l'oral suivant.

• Si vous avez le temps, relisez les questions de chacun des oraux en essayant de vous rappeler exactement de ce qu'il faudrait faire. Lisez éventuellement rapidement la correction d'exercices qui vous poseraient encore des soucis.Vous devriez être prêt pour le jour J !

À vous de jouer : bon courage !

✉ *Si vous avez une question concernant un des exercices proposés, envoyez-moi un mail à oral.bac@free.fr : je vous répondrai dès que possible !*

Sujet n°1

▶ Exercice 1

Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ sous forme trigonométrique.

▶ Exercice 2

Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 3

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x-1}$.

Correction du sujet n°1

▶ Exercice 1

• On commence d'abord par transformer le nombre complexe sous forme algébrique : on multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ de $\sqrt{3}+\mathrm{i}$:

$\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}+3\mathrm{i}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+1^2}$ (pour le dénominateur, on a utilisé l'égalité $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+$

On en déduit que $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$.

• Vous devriez reconnaître la forme trigonométrique de ce nombre complexe : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=\boldsymbol{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$.
Si ce n'est pas le cas, voici la méthode « habituelle » permettant de déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe :

Étape 1 – calcul de son module : $r=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}}=1$.

Étape 2 – recherche de son argument : avec $\alpha=\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$, on a $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, donc $\alpha=\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

On retrouve bien l'écriture trigonométrique $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\boldsymbol{1\times\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)}$.

▶ Exercice 2

Il est recommandé – dès que l'on doit calculer une intégrale – de justifier que le calcul est possible car la fonction $f : x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ (c'est le quotient de deux fonctions continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas)

Ensuite, précisez que f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x)>0$ sur $[0\,;\,1]$.
Une de ses primitives est de la forme $x\mapsto\ln u$

On en déduit que $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1=\ln(1+\mathrm{e}^1)-\ln(1+\mathrm{e}^0)=\boldsymbol{\ln(1+\mathrm{e})-\ln 2}$ ou $\boldsymbol{\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)}$.

▶ Exercice 3

Le numérateur de la fonction présente la forme indéterminée « $+\infty-\infty$ ». On doit transformer l'écriture de $f(x)$ pour lever cette indétermination. Il suffit de factoriser le numérateur et le dénominateur par x :

$\dfrac{x-\ln x}{x-1}=\dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1-\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on obtient finalement $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x-1}=1}$.

Sujet n°2

▶ Exercice 4

Résoudre l'équation $\ln(x^2+4x+3)=\ln(-2x-5)$.

▶ Exercice 5

Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(2+t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux, en justifiant votre réponse :

1. $F(0)=\ln 2$;
2. $F'(x)=\dfrac{1}{2+x}$;
3. F est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Correction du sujet n°2

▶ Exercice 4

1 Vous devez impérativement débuter cet exercice en déterminant le domaine de validité de cette équation !

Il faut en effet s'assurer que les solutions – si elles existent – sont telles que $\begin{cases} x^2+4x+3>0 \\ -2x-5>0 \end{cases}$

- Pour le polynôme du second degré x^2+4x+3 :
  On calcule son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times3=4$; comme $\Delta>0$, le polynôme est du signe de $a=1$ – donc positif – à l'extérieur de ses racines $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-3$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-1$.
- $-2x-5>0 \iff -2x>5 \iff x<-\dfrac{5}{2}$.
- **Conclusion** : la synthèse de ces deux contraintes permet d'indiquer que les solutions éventuelles de l'équation doivent appartenir à l'intervalle $\mathrm{I}=]-\infty\,;\,-3[$.

2 On résout maintenant l'équation en se basant sur la propriété « $\mathbf{\ln a=\ln b \iff a=b}$ » :
$\ln(x^2+4x+3)=\ln(-2x-5) \iff x^2+4x+3=-2x-5 \iff x^2+6x+8=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant 4, et pour solutions $-4\in\mathrm{I}$ et $-2\notin\mathrm{I}$.
L'ensemble des solutions est finalement : $\boldsymbol{S=\{-4\}}$.

▶ Exercice 5

Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x \ln(2+t)\,\mathrm{d}t$.

1. **FAUX** : $F(0)=\displaystyle\int_0^0 \ln(2+t)\,\mathrm{d}t=0\neq\ln 2$;
2. **FAUX** : Un rappel de cours utile :

La fonction $F: x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de la fonction f qui s'annule en a.

   On en déduit, par définition, que $F'(x)=f(x)=\ln(2+x)\neq\dfrac{1}{2+x}$;
3. **VRAI** : Comme pour tout $x>0$, $F'(x)=\ln(2+x)>\ln(2)>0$, alors la fonction F est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Remarques :
↯ Ne pas dire *la fonction* $f(x)$!
☺ Mais plutôt *la fonction* f ; en effet, $f(x)$ est l'image du nombre x par la fonction f…

Sujet n°3

▶ Exercice 6

Résoudre l'inéquation : $e^{2x} - e^x - 2 > 0$.

▶ Exercice 7

On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par $u_n = \int_0^n x^2 e^{-x} dx$.

Déterminer le signe puis les variations de la suite (u_n).

Correction du sujet n°3

▶ Exercice 6

On commence par poser $X = e^x$, de façon à pouvoir remplacer e^x et $e^{2x} = (e^x)^2$ par X et X^2 ;
l'inéquation (1) : $e^{2x} - e^x - 2 > 0$ se ramène alors à l'inéquation du second degré (2) : $X^2 - X - 2 > 0$.
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$;
Δ étant strictement positif, le polynôme $X^2 - X - 2$ a pour racines $X_1 = \cdots = -1$ et $X_2 = \cdots = 2$
Ce polynôme est du signe de $a = 1$ (donc positif) à l'extérieur de ses racines X_1 et X_2.

On en déduit que $X^2 - X - 2 > 0 \iff \left| \begin{array}{l} X < -1 \\ \text{ou} \\ X > 2 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} e^x < -1 \\ \text{ou} \\ e^x > 2 \end{array} \right.$

Comme pour tout x réel, e^x est strictement positif, l'inéquation $e^x < -1$ n'a pas de solution.
Finalement, $e^{2x} - e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$, et l'ensemble solution de (1) est $\boldsymbol{S =]\ln 2\,;\,+\infty[}$.

▶ Exercice 7

Quelques rappels utiles :

(1) Positivité d'une intégrale :

Si f est une fonction continue positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, avec $a \leqslant b$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est positive.

(2) Pour étudier les variations d'une suite (u_n) définie par une intégrale, une seule méthode ! Il faut déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si cette différence est négative, alors la suite (u_n) est décroissante, si elle est positive, la suite est croissante.

(3) On aura besoin, dans cet exercice, des égalités suivantes :

$$-\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \qquad \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt \text{ (relation de Chasles)}$$

- **Signe de u_n.**

  Sur l'intervalle $[0\,;\,n]$, $x^2 \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $x^2 e^x \geqslant 0$, ce qui prouve – d'après la propriété (1) de positivité de l'intégrale – que $u_n = \int_0^n x^2 e^{-x} dx \geqslant 0$.

- **Variations de (u_n).**

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} x^2 e^{-x} dx - \int_0^n x^2 e^{-x} dx = \int_0^{n+1} x^2 e^{-x} dx + \int_n^0 x^2 e^{-x} dx = \int_n^{n+1} x^2 e^{-x} dx.$$

Comme sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$, la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ est positive ($n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$), on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ est positif, donc que la suite (u_n) est croissante.

Sujet n°4

► Exercice 8

Déterminer la valeur de k pour laquelle la fonction

$$f : x \longmapsto kx$$

est une densité de probabilité sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

► Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 8z + 5 = 0$; on notera z_1 et z_2 les affixes obtenues, avec $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$.
2. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et $-2 + \frac{\text{i}}{2}$.
   Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Correction du sujet n°4

► Exercice 8

Commençons par rappeler la définition d'une densité de probabilité sur un intervalle I : c'est une fonction continue et positive telle que son intégrale sur I soit égale à 1.

– Ici, la fonction $f : x \longmapsto kx$ est une fonction linéaire : elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

– f est positive sur $[1 ; 5]$ si et seulement si k est un nombre positif.

– Enfin, f est une densité de probabilité sur $[1 ; 5]$ si, et seulement si $\displaystyle\int_1^5 kx\,\text{d}x = 1$.

Or $\displaystyle\int_1^5 kx\,\text{d}x = \left[k \times \frac{x^2}{2}\right]_1^5 = k \times \frac{5^2}{2} - k \times \frac{1^2}{2} = 12k$

On en déduit que f est une densité de probabilité sur $[1 ; 5]$ si, et seulement si $12k = 1 \iff k = \dfrac{1}{12}$.

► Exercice 9

1. On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 4 \times 5 = -16$.
   Comme Δ est strictement négatif, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1 = \dfrac{-b - \text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 - 4\text{i}}{2 \times 4} = \mathbf{-1 - \frac{1}{2}}\text{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \mathbf{-1 + \frac{1}{2}}\text{i}$.

2. Posons $Z_\text{A} = z_1 = -1 - \frac{1}{2}\text{i}$ et $Z_\text{B} = z_2 = -1 + \frac{1}{2}\text{i}$.
   En faisant une petite figure, on peut conjecturer que le triangle ABC semble rectangle isocèle en B.

   - On sait que BA$= |Z_\text{A} - Z_\text{B}| = |-1 - \frac{1}{2}\text{i} + 1 - \frac{1}{2}\text{i}| = |-\text{i}| = 1$, et que BC$= |Z_\text{C} - Z_\text{B}| = |-2 + \frac{1}{2}\text{i} + 1 - \frac{1}{2}\text{i}| = |-1| = 1$.
     Il en résulte que **BA=BC**.
   - D'autre part, $\left(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{BA}}\right) = \arg\left(\dfrac{Z_\text{A} - Z_\text{B}}{Z_\text{C} - Z_\text{B}}\right) = \arg\left(\dfrac{-\text{i}}{-1}\right) = \arg(i) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}\ [2\pi]$.

   Remarque :
   Autre possibilité : calculer la longueur AC et utiliser la réciproque du théorème de Pythagore !

Sujet n°5

▶ Exercice 10

On donne l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$; montrer que : $1 \leqslant \mathrm{I} \leqslant \mathrm{e}$.

▶ Exercice 11

Étudier le signe de $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$, suivant les valeurs de x.

▶ Exercice 12

On admet que la masse des oeufs de poule en grammes d'une race donnée est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type 4. Un éleveur certifié « agriculture biologique » (AB) prélève dans la production de son poulailler un oeuf au hasard.

1. Calculer la probabilité que la masse de cet oeuf soit supérieure à 56 grammes.
2. Calculer la probabilité que la masse de cet oeuf soit comprise entre 52 grammes et 68 grammes.

Correction du sujet n°5

▶ Exercice 10

Rappel de cours sur l'encadrement d'une intégrale :

Si $f \leqslant g \leqslant h$ sur un intervalle $[a\,;\,b]$, avec $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b h(t)\mathrm{d}t$.

Nous allons donc devoir encadrer e^{x^2} sur l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Rightarrow \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^1$ (précisez que la fonction *exponentielle* est croissante sur $\mathbb{R}$, donc qu'elle conserve l'ordre).

Finalement, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a : $1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}$.

En intégrant cette double inégalité de 0 à 1 (voir le rappel), on en déduit que :

$\displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x$

Les primitives de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e$ sont respectivement $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}\,x$, donc :

$[x]_0^1 \leqslant \mathrm{I} \leqslant [\mathrm{e}\,x]_0^1 \iff 1-0 \leqslant \mathrm{I} \leqslant \mathrm{e}\times 1 - \mathrm{e}\times 0 \iff \mathbf{1 \leqslant I \leqslant e}$.

▶ Exercice 11

Commençons d'abord par préciser que x doit être strictement positif (pour que $\ln x$ soit défini)

Ensuite, posons $X = \ln x$.

On a : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = X^2 - 2X - 3$.

Étudions alors le signe du polynôme du second degré $X^2 - 2X - 3$:

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$, donc $X^2 - 2X - 3$ a deux racines $X_1 = \cdots = -1$ et $X_2 = \cdots = 3$.

Le signe de $X^2 - 2X - 3$ est celui de $a = 1$ (donc positif) à l'extérieur des racines X_1 et X_2 :

- $X^2 - 2X - 3 \geqslant 0 \iff X \in]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[$;
- $X^2 - 2X - 3 \leqslant 0 \iff X \in [-1\,;\,3]$.

On en déduit que, par exemple : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \leqslant 0 \iff -1 \leqslant \ln x \leqslant 3 \iff \mathrm{e}^{-1} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^3$.

Conclusion : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$ est :

- strictement négatif sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,\mathrm{e}^3[$,
- s'annule en e^{-1} et en e^3,
- strictement positif sur les intervalles $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}[$ et $]e^3\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice 12

Dans cet exercice, on vous demande de savoir manipuler votre calculatrice :

CASIO : menu STAT – DIST (F5) – NORM (F1) – NCD (F2) | **TI** : DISTR – NormalFrep(a,b,μ,σ)

1. $P(M \geqslant 56) \simeq 0,841$ à 10^{-3} près.
2. $P(52 \leqslant M \leqslant 68) \simeq 0,954$ à 10^{-3} près.

Sujet n°6

▶ Exercice 13

La durée de vie T d'un composant électronique, exprimée en année, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On admet qu'en moyenne, un de ces composants électroniques a une durée de vie de 10 ans.

1. Préciser la valeur de λ.
2. Déterminer la probabilité qu'un composant électronique ait une durée de vie supérieure à 6 ans.
3. Déterminer la probabilité qu'un composant électronique ait une durée de vie supérieure à 10 ans sachant qu'il fonctionne depuis 4 ans.

▶ Exercice 14

Résoudre l'inéquation $(2x-7)\ln(x+1) \geqslant 0$.

▶ Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$; écrire les solutions sous forme algébrique, puis trigonométrique.

Correction du sujet n°6

▶ Exercice 13

1. D'après le cours, on sait que la moyenne – c'est-à-dire l'espérance mathématique de T – est $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}$.

   Ainsi, $\dfrac{1}{\lambda}=10 \iff \boldsymbol{\lambda=0,1}$.
2. $P(T>6)=1-P(T\leqslant 6)=1-\displaystyle\int_0^6 0,1\,\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{d}t=1-\left[-\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_0^6=1+\left[\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_0^6$

   $P(T>6)=1+\mathrm{e}^{-0,1\times 6}-\mathrm{e}^{-0,1\times 0}=1+\mathrm{e}^{-0,6}-1=\boldsymbol{\mathrm{e}^{-0,6}}\simeq \mathbf{0,549}$, à 10^{-3} près.
3. $P_{T>4}(T>10)=P(T>6)$ (durée de vie sans vieillissement)

   Donc $P_{T>4}(T>10)\simeq 0,549$.

▶ Exercice 14

Première chose à faire : indiquer que $\ln(x+1)$ a un sens si et seulement si $x+1>0$, c'est-à-dire si $x>-1$.
Ensuite, pour étudier le signe du produit de deux facteurs, on va utiliser un tableau de signes. Étudions séparément le signe de chacun des deux facteurs :

• $2x-7\geqslant 0 \iff 2x\geqslant 7 \iff x\geqslant \dfrac{7}{2}$;

• $\ln(x+1)\geqslant 0 \iff x+1\geqslant \mathrm{e}^0 \iff x+1\geqslant 1 \iff x\geqslant 0$.

On peut maintenant résumer le signe de $(2x-7)\ln(x+1)$ dans le tableau ci-contre :

x	-1		0		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-7)\ln(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\boldsymbol{S=]-1\,;\,0]\cup\left[\frac{7}{2}\,;\,+\infty\right[}$.

▶ Exercice 15

Après avoir trouvé $\Delta=-3<0$, on obtient les deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{\mathbf{-1-i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}=\mathbf{cos}\left(-\dfrac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)+\mathrm{i}\,\mathbf{sin}\left(-\dfrac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)$ et $z_2=\dfrac{\mathbf{-1-i\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}=\mathbf{cos}\left(\dfrac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)+\mathrm{i}\,\mathbf{sin}\left(\dfrac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\right)$

↯ Ne surtout pas hésiter à dessiner un cercle trigonométrique et placer les points d'affixes z_1 et z_2) (voir corrigé de l'oral 17)

Sujet n°7

▶ Exercice 16

On jette un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note A l'événement : « Obtenir la face n°1 ».

1. Déterminer les probabilités de l'événement A et de son événement contraire $\overline{\text{A}}$.
2. On jette maintenant le dé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   (a) exactement deux fois le 1 ?
   (b) au moins une fois un 1 ?

▶ Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α sur $]1\,;\,+\infty[$.

Correction du sujet n°7

▶ Exercice 16

1. Il est clair que $\boldsymbol{p}(\text{A}) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$, puis que $p\left(\overline{\text{A}}\right) = 1 - p(\text{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$.
2. On reconnaît ici un schéma de Bernoulli : on répète 5 fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli, épreuve à deux issues, que l'on peut nommer succès S : « obtenir le 1 » de probabilité $p = p(\text{S}) = \frac{1}{6}$, et échec $\overline{\text{S}}$: « ne pas obtenir le 1 », de probabilité $p\left(\overline{\text{S}}\right) = 1 - p(\text{S}) = \frac{5}{6}$.
   La variable aléatoire X égale au nombre de succès lors de ces 5 tirages suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.
   Pour tout entier $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$, on a alors : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \boldsymbol{\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}}$.
   (a) $p(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1250}{7776}} \simeq \mathbf{0{,}171}$.
   (b) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{3125}{7776}} \simeq \mathbf{0{,}402}$.

▶ Exercice 17

Cet exercice s'appuie essentiellement sur la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, parfois appelé le « théorème de la bijection » .
Étudions d'abord les variations de la fonction f sur $]1\,;\,+\infty[$, en cherchant le signe de sa dérivée :
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ puisque sur $]1\,;\,+\infty[$, $x > 0$ et $x + 1 > 0$.
La fonction f est **continue** sur $]1\,;\,+\infty[$ (en tant que différence de deux fonctions continues sur ce même intervalle) et **strictement croissante** sur $]1\,;\,+\infty[$.
Comme $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, l'image de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par f est l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
Comme l'intervalle image $[1\,;+\infty[$ contient 2, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha \in [1\,;+\infty[$.

Sujet n°8

▶ Exercice 18

– L'urne n°1 contient 4 boules noires et 2 boules rouges ;
– l'urne n°2 contient 2 boules noires et 1 boule rouge ;
– l'urne n°3 contient 3 boules noires.

On tire au hasard une boule dans l'urne n°1 pour la disposer dans l'urne n°2. On tire alors au hasard une boule de l'urne n°2 pour la mettre dans l'urne n°3. On termine l'expérience en tirant une boule de l'urne n°3.
Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne n°3 ?

▶ Exercice 19

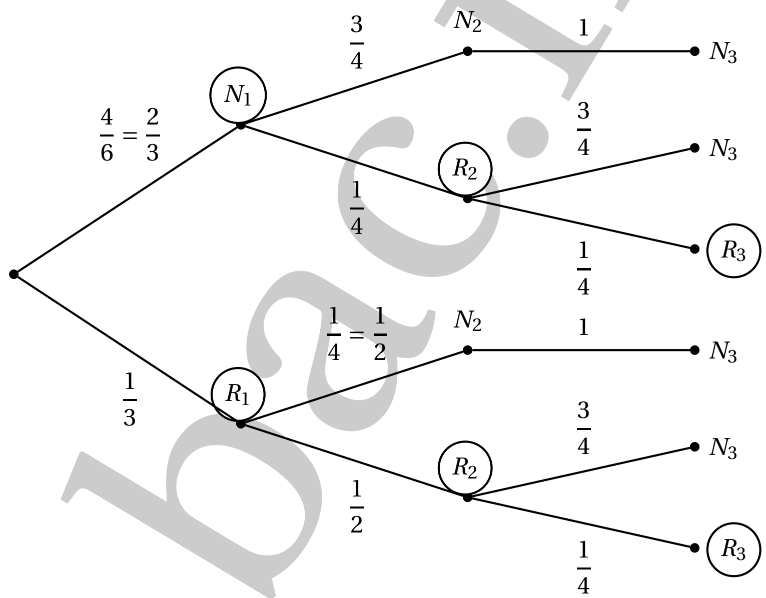
Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

Correction du sujet n°8

▶ Exercice 18

Dans cet exercice, l'idéal est de dessiner un arbre, pour non seulement pouvoir traiter l'exercice plus facilement, mais aussi pour visualiser la situation d'un seul coup d'oeil, sans avoir à revenir à l'énoncé plusieurs fois.
Justifiez à l'oral chaque probabilité inscrite sur l'arbre, au fur et à mesure :



L'événement A : « tirer une boule rouge dans l'urne n°3 » est la réunion des événements incompatibles $N_1 \cap R_2 \cap R_3$ et $R_1 \cap R_2 \cap R_3$.
On a donc $p(\mathrm{A}) = p(N_1 \cap R_2 \cap R_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$, soit $p(\mathrm{A}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \mathbf{\frac{1}{12}}$.

▶ Exercice 19

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
   En multipliant les trois membres par e^x qui est un réel strictement positif, on obtient le résultat attendu : $-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.
2. Remarquons pour commencer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} -\mathrm{e}^x = 0$.
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ (donc l'axe des abscisses) comme asymptote en $-\infty$.
3. • *Intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.*
     L'abscisse du point d'intersection cherché est 0. Son ordonnée est $f(0) = \mathrm{e}^0 \cos 0 = 1$.
     La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\mathbf{(0\,;1)}$.

- *Intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.*
  On résout l'équation $f(x) = 0 \iff \cos x\,\mathrm{e}^x = 0 \iff \cos x = 0$ (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \neq 0$)
  Donc $f(x) = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k \times \pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
  La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en une infinité de points de coordonnées $\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ 0}\right)$, **avec** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$**.**

Sujet n°9

▶ Exercice 20

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
On donne les points A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; −1 ; 0) et C(0 ; 0 ; −3).

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan ABC.

▶ Exercice 21

Dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + \mathrm{i}$ et $c = 2\mathrm{i}$.

1. Calculer le rapport $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$.
2. Démontrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\quad (2\pi)$.
3. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$.

Correction du sujet n°9

▶ Exercice 20

1. Pour démontrer que les points A, B et C définissent un plan, il faut prouver qu'ils ne sont pas alignés. Pour y arriver, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ – par exemple – sont colinéaires.

   Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

   Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ n'étant pas colinéaires, on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

2. Pour déterminer une équation cartésienne du plan ABC, déterminons d'abord les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un de ses vecteurs normaux $\vec{\mathrm{n}}$.
   Indiquez que, pour qu'un vecteur $\vec{\mathrm{n}}$ soit normal au plan ABC, il doit être orthogonal à *deux* de ses vecteurs directeurs, soit par exemple $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   Dans ces conditions, $\begin{cases} \vec{\mathrm{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \vec{\mathrm{n}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - 3b - 3c = 0 \\ -a - 2b - 6c = 0 \end{cases}$

   Le vecteur $\vec{\mathrm{n}}$ n'étant pas unique, on peut – on **doit** serait plus juste – fixer librement l'une de ses coordonnées : posons par exemple $a = 12$ (*je sais. ! Vous vous dites sûrement que ce choix n'a pas été fait au hasard... Essayez en posant $a = 1$, vous comprendrez pourquoi* ☺)

   On obtient alors $\begin{cases} b = 15 \\ c = -7 \end{cases}$ (les calculs intermédiaires sont pour vous ;)

   Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal du plan ABC ; l'équation de ABC est de la forme : $12x + 15y - 7z + d = 0$.
   Il nous reste à déterminer la valeur de d.
   Pour cela, on utilise les coordonnées d'un point du plan :
   $\mathrm{C}(0\ ;\ 0\ ;\ -3) \in \mathrm{ABC} \iff 12 \times 0 + 15 \times 0 - 7 \times (-3) + d = 0 \iff d = -21$.

   L'équation du plan ABC est : $\boldsymbol{12x + 15y - 7z - 21 = 0}$.

▶ Exercice 21

1. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{|b-a|}{|c-a|} = \dfrac{|1+i|}{|2i-2|} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{(-2)^2+2^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$.
2. $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \arg(b-a) - \arg(c-a) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\ (2\pi)$
3. $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\dfrac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg\left(\dfrac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}\right) = \arg\left(\dfrac{-\cancel{2}-2i-2i+\cancel{2}}{(-2)^2+2^2}\right) = \arg\left(-\dfrac{1}{2}i\right) = -\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$.

Remarque : On pouvait aussi calculer l'argument de cette manière :
$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\dfrac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg(1+i) - \arg(-2+2i)$.
Comme $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg(-2+2i) = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$, on en déduit que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = -\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$.

Sujet n°10

▶ Exercice 22

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq -2$: $\dfrac{x^2}{x+2} = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 23

Une rhino-pharyngite guérit naturellement en moins de 5 jours dans 60% des cas.
On veut tester un médicament censé abréger la durée de la maladie. Pour cela, on administre le médicament à 1 000 personnes. Pour 63% d'entre elles, la guérison a eu lieu en moins de 5 jours.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 associé à la situation.
2. Que peut-on penser de l'efficacité de ce médicament ?

Correction du sujet n°10

▶ Exercice 22

1. On transforme tout d'abord l'expression $ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ sous la forme d'un seul quotient.
$$\frac{x^2}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2} \iff \frac{x^2}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} \iff \frac{x^2}{x+2} = \frac{ax^2+(b+2a)x+c+2b}{x+2}.$$
Les polynômes x^2 et $ax^2+(b+2a)x+c+2b$ sont égaux pour tout $x \neq -2$ si, et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b+2a = 0 \\ c+2b = 0 \end{cases}$
On en déduit finalement que $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$, donc que pour tout $x \neq -2$, $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{x+2} = x - 2 + \dfrac{4}{x+2}}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x - 2 + \frac{4}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 2\times 1 + 4\ln(1+2) - \left(\frac{0^2}{2} - 2\times 0 + 4\ln(0+2)\right)$
D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}\mathrm{d}x = \mathbf{4\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}}$ ou encore $\mathbf{4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}}$.

▶ Exercice 23

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est $[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, avec $p = 0,60$ et $n = 1\,000$.
On obtient : l'intervalle $[0,5696\ ;\ 0,6304]$. On peut traduire ce résultat par l'affirmation suivante : « dans 95% des échantillons de 1 000 personnes malades, il y aura entre 56,96 % et 63,04 % de sujets qui guérissent naturellement en moins de 5 jours ».

2. La fréquence de guérison observée sur les malades soignés par le médicament est égale à 0,63 : cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 : on en déduit – avec un risque d'erreur de 5 % – que le médicament n'a pas d'effet particulier sur la guérison des sujets.

Sujet n°11

▶ Exercice 24

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x, on a : $f(-x) = f(x)$ et $f(x+\pi) = f(x)$.
   Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

▶ Exercice 25

Soient P et Q les plans d'équations respectives $2x+3y+z-4=0$ et $x-y+5=0$.

1. Montrer que les plans P et Q sont sécants.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection.

Correction du sujet n°11

▶ Exercice 24

1. • $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$ car la fonction cos est paire. On en déduit que f est paire et que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
   Autre rappel : si $f(-x) = -f(x)$, f est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.
   • $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$ puisque la fonction cos est 2π-périodique.
   On en déduit que f est π périodique : sa courbe représentative s'obtient à partir d'un morceau de celle ci d'amplitude π par des translations de veteurs $k \times \pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. • $f'(x) = -2\sin(2x)$.
   • Si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0 ; \pi]$ et $\sin(2x) \geqslant 0$.
   (ne pas hésiter à dessiner rapidement à main levée un cercle trigonométrique)
   Ainsi, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.
3. D'après le signe de $f'(x)$ obtenu dans la question précédente, f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
   Comme f est paire, alors f est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

▶ Exercice 25

> Rappelons que *si $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan, alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de ce plan.*

1. Ici, les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectivement de P et Q.

   Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles : $\vec{\text{n}}$ et $\vec{\text{n'}}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans P et Q n'étant pas parallèles, ils sont sécants.

2. Notons Δ la droite intersection des plans P et Q.

   Un point M de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ appartient à Δ si, et seulement si ses coordonnées vérifient :

   $$\begin{cases}2x+3y+z-4=0\\x-y+5=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=y-5\\y=y\\z=-2x-3y+4\end{cases} \iff \begin{cases}x=y-5\\y=y\\z=-2(y-5)-3y+4\end{cases} \iff \begin{cases}\boldsymbol{x=-5+y}\\\boldsymbol{y=y}\\\boldsymbol{z=14-5y}\end{cases}$$

   En posant – par exemple – $y=t$, le système $\begin{cases}\boldsymbol{x=-5+t}\\\boldsymbol{y=t}\\\boldsymbol{z=14-5t}\end{cases}$ $\boldsymbol{(t\in\mathbb{R})}$ est un système d'équations paramétriques de Δ.

Remarque : On peut vous demander quelles informations on peut « tirer » du système paramétrique $\begin{cases}x=x_\text{A}+\alpha t\\y=y_\text{A}+\beta t\\z=z_\text{A}+\gamma t\end{cases}$ d'une droite. Indiquez que $(x_\text{A}\,;\ y_\text{A}\,;\ z_\text{A})$ correspondent aux coordonnées d'un point A de cette droite, et que le vecteur $\vec{\text{U}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ en est *un* vecteur directeur.

Sujet n°12

▶ Exercice 26

1. Démontrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0$.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-\text{e}}=\dfrac{1}{\text{e}}$

▶ Exercice 27

On donne la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=1+\dfrac{1}{v_n}\end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{3}{2}\leqslant v_n\leqslant 2$.

Correction du sujet n°12

▶ Exercice 26

1. Remarquez tout d'abord que cette forme est indéterminée, du type « $0\times-\infty$ », puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

   Pour lever cette indétermination, effectuons le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$:

   $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

   Or, quel que soit $X>0$, $\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\ln X$,

   donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln X}{X}=0$ (croissances comparées en $+\infty$)

   On en déduit bien finalement que : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0}$.

2. **Rappel important** :

   si f est une fonction dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

   Ici, on sait que la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$: f est dérivable en particulier en $a = \mathrm{e}$, ce qui permet de déduire que : $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - \ln \mathrm{e}}{x-\mathrm{e}} = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-\mathrm{e}} = f'(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}$, car $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

▶ Exercice 27

Notons $\mathscr{P}_n$ la propriété à démontrer : $\dfrac{3}{2} \leqslant v_n \leqslant 2$.

Pour une démonstration par récurrence, suivez bien les quatre étapes suivantes :

1. Au rang 0, la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée puisque $\dfrac{3}{2} \leqslant v_0 \leqslant 2 \quad (v_0 = 2)$

2. Supposons que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie à un certain rang n, c'est-à-dire qu'il existe un entier n tel que $\dfrac{3}{2} \leqslant v_n \leqslant 2$.

3. Démontrons qu'alors la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$:

   Comme $\dfrac{3}{2} \leqslant v_n \leqslant 2$, en passant aux inverses (tous les membres sont strictement positifs),

   on obtient : $\dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, soit encore $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{v_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$.

   En ajoutant 1 à chaque membre, il vient : $1 + \dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{v_n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{3}$,

   d'où : $\dfrac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{3}$, ce qui prouve finalement que $\dfrac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$ (puisque $\dfrac{5}{3} \leqslant 2$)

4. La dernière étape est importante : c'est la conclusion.

   Indiquez précisément que *la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.*

Sujet n°13

▶ Exercice 28

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-n}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

▶ Exercice 29

A et B sont deux points distincts de l'espace. On note I le milieu du segment [AB].

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$.

Correction du sujet n°13

▶ Exercice 28

1. f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ en tant que composée de deux fonctions dérivables.

   Étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$ sur $[0\,;\,+\infty[$ en déterminant le signe de sa dérivée.

   Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, on a : $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

   Comme pour tout x réel, e^{-x} est strictement positif, on en déduit que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) < 0$, et donc que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Comme $u_n = f(n)$ et que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on en conclut déjà que la suite (u_n) est strictement décroissante.

- Une suite décroissante est majorée par son premier terme, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$, soit $u_n \leqslant \ln 2$.
- D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{X}\right) = \lim\limits_{U\to 0^+} \ln(1+U) = 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est bornée puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbf{0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2}$.

▶ Exercice 29

Puisque I est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ (en effet : $\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{0}$)
L'égalité $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$ équivaut donc successivement à $2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{MI}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MA}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ sont orthogonaux si, et seulement si le triangle AIM est rectangle en M, c'est-à-dire si M est situé sur la sphère de diamètre [IA].
L'ensemble des points M est donc la sphère de diamètre [IA].

Sujet n°14

▶ Exercice 30

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, A est le point de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,-3)$ et P est le plan d'équation $2x-y+z+1=0$.

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par A et orthogonale au plan P.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de D et P.
3. Calculer la distance du point A au plan P.

▶ Exercice 31

Sur une route, un automobiliste rencontre successivement deux feux tricolores de circulation A et B.
Ces feux fonctionnent de manière indépendante. La probabilité que le feu A soit vert est $\dfrac{3}{4}$ et celle que le feu B soit vert est $\dfrac{1}{2}$. Calculer la probabilité pour que l'automobiliste rencontre :

1. deux feux verts ;
2. au moins un feu vert.

Correction du sujet n°14

▶ Exercice 30

1. La droite D est orthogonale au plan P si, et seulement si un de ses vecteurs directeurs est aussi un vecteur normal du plan P.

   Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, vecteur normal de P, est donc un vecteur directeur de D.

   Ensuite, évitez de *balancer* directement le système d'équations paramétriques de D !

   $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ est un point de D si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires,

   c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{\mathrm{n}}$.

   En égalant les coordonnées de ces vecteurs, $M \in D \iff \begin{cases} x-1=2t\\ y-2=-t\\ z+3=t\end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x=1+2t}\\ \boldsymbol{y=2-t}\\ \boldsymbol{z=-3+t}\end{cases}$

2. Les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ du point d'intersection de D et P vérifient à la fois les équations de D et de P.

   On est amené à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x-y+z+1=0\\ x=1+2t\\ y=2-t\\ z=-3+t\end{cases} \iff \begin{cases} 2(1+2t)-(2-t)+(-3+t)+1=0\\ x=1+2t\\ y=2-t\\ z=-3+t\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3+t \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{z} = -\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} \end{cases}$$

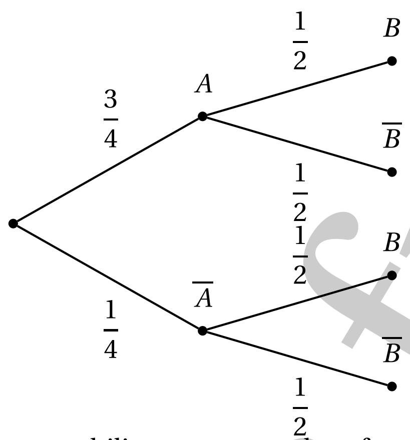
Le point d'intersection de D et P est le point $\boldsymbol{\Omega}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\ ;\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\ ;\ -\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right)$.

3. La distance du point A au plan P est en réalité la distance $A\Omega$.

   On a donc $A\Omega = \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2 + (z_\Omega - z_A)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3}-2\right)^2 + \left(-\dfrac{8}{3}+3\right)^2} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}$

▶ Exercice 31

On peut commencer par décrire la situation à l'aide d'un arbre pondéré, où A désigne l'événement « le premier feu est vert », et B est l'événement « le second feu est vert » :



1. La probabilité pour que l'automobiliste rencontre deux feux verts est $p(A\cap B) = p(A)\times p_A(B) = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$.
2. L'événement C : « au moins un feu est vert » et l'événement $\overline{\text{C}}$: « aucun feu n'est vert » sont deux événements contraires.

   On a donc $p(C) = 1 - p\left(\overline{\text{C}}\right) = 1 - p\left(\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$.

Sujet n°15

▶ Exercice 32

Dans un lycée de 400 élèves, une enquête a donné les résultats suivants :
- 200 élèves aiment la lecture ;
- 180 élèves aiment le sport ;
- 60 élèves n'aiment ni la lecture, ni le sport.

On choisit au hasard un élève du lycée.

1. Quelles sont les probabilités des événements :
   - L : « l'élève aime la lecture » ;
   - S : « l'élève aime le sport » ;
   - R : « l'élève n'aime ni la lecture ni le sport ».
2. En déduire les probabilités des événements $S\cup L$ et $S\cap L$.
3. Calculer la probabilité que l'élève aime la lecture, sachant qu'il aime le sport.

▶ Exercice 33

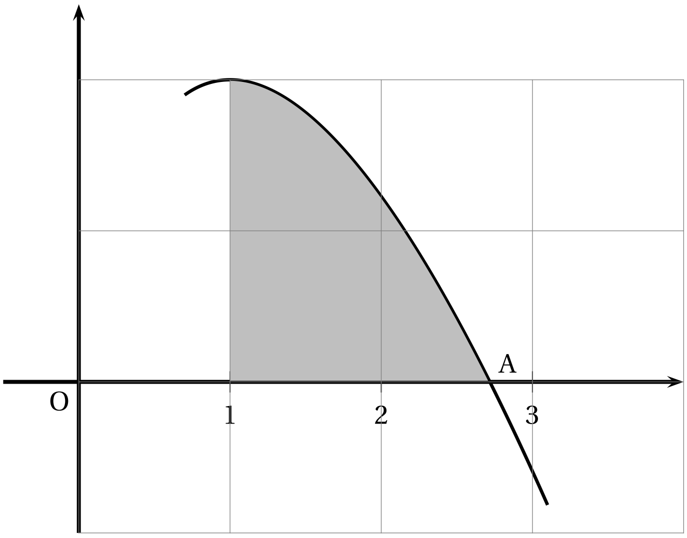
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x(1-\ln x)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Résoudre, par le calcul, l'inéquation $f(x)\geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On désigne par $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.



Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction du sujet n°15

▶ Exercice 32

Dans cet exercice, il est fortement recommandé de remplir un tableau à double entrée, même si l'exercice peut se traiter sans… En gras dans le tableau, on trouve les nombres qui viennent directement de la lecture de l'énoncé, et en rouge ceux que l'on a calculé :

	S	$\overline{\text{S}}$	**Total**
L	40	160	**200**
$\overline{\text{L}}$	140	**60**	200
Total	**180**	220	**400**

1. – $p(L) = \dfrac{200}{400} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$: *indiquez que cette probabilité est le quotient du nombre de cas favorables (200) par le nombre de cas possibles (400).*
   – $p(S) = \dfrac{180}{400} = \mathbf{\dfrac{9}{20}}$;
   – $p(R) = p\left(\overline{\text{S}} \cap \overline{\text{L}}\right) = \dfrac{60}{400} = \mathbf{\dfrac{3}{20}}$.

2. • $p(S \cup L) = 1 - p\left(\overline{S \cup L}\right) = 1 - p\left(\overline{\text{S}} \cap \overline{\text{L}}\right) = 1 - \dfrac{3}{20} = \mathbf{\dfrac{17}{20}}$ ou – plus simplement – $p(S \cup L) = \dfrac{40 + 140 + 160}{400}$…

   • $p(S \cap L) = \dfrac{40}{400} = \mathbf{\dfrac{1}{10}}$.

   Autre métode possible en se basant sur l'égalité : $p(S \cup L) = p(S) + p(L) - p(S \cap L)$.

   On a donc $p(S \cap L) = p(S) + p(L) - p(S \cup L) = \dfrac{9}{20} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{17}{10}$…

3. La probabilité que l'élève aime la lecture, sachant qu'il aime le sport est la probabilité conditionnelle :

   $p_S(L) = \dfrac{p(S \cap L)}{p(S)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}} = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{20}{9} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$.

▶ Exercice 33

1. $f(x) \geqslant 0 \iff 2x(1 - \ln x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0$ (car $x > 0$)

   $\iff -\ln x \geqslant -1 \iff \ln x \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e}$.

   L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est alors $\boldsymbol{S =]0\,;\,\mathrm{e}]}$.

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}]$.

2. *Pour démontrer que la fonction F est une primitive de f, il faut prouver que $F' = f$.*
   F étant un produit de deux fonctions, on utilise la formule $(u \times v)' = u'v + uv'$:
   $F'(x) = 2x\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x = 2x(1 - \ln x) = f(x)$.
   F est bien une primitive de f.
3. Comme la fonction f est positive sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$, l'aire de $\mathscr{D}$ – en unités d'aire – est égale à l'intégrale
   $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e}^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln \mathrm{e}\right) - 1^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln 1\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{3}{2} = \mathbf{\dfrac{e^2 - 3}{2}} \simeq \mathbf{2{,}2}$.

   Remarque : On peut vous demander, pour terminer votre oral, si le résultat est conforme à ce que l'on aurait pu prévoir graphiquement : l'aire grise sur la figure semble effectivement un peu plus grande que deux unités d'aire (deux carreaux).

Sujet n°16

▶ Exercice 34

1. u étant une fonction dérivable et continue sur un intervalle, rappeler la formule donnant la primitive de :
   (a) $u' \times u$; (b) $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
2. Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 35

On définit la fonction f par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{\ln x}, \text{ pour } x \in]0 ; 1[\end{cases}$

Étudier la continuité, puis la dérivabilité de la fonction f en 0.

Correction du sujet n°16

▶ Exercice 34

1. C'est une question de cours, « pure et dure » :
   (a) $u' \times u$ a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$.
   On peut rappeler au passage que $u' \times u^n$ a pour primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, pour tout $n \neq -1$.
   (b) $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$ (précisez que u doit être strictement positif)
2. • La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u' \times u$, avec $u(x) = \ln x$.
   D'après la question précédente, la fonction $F : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
   On en déduit que $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_0^{\mathrm{e}} = \dfrac{(\ln \mathrm{e})^2}{2} - \dfrac{(\ln 1)^2}{2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

   • Transformons l'écriture de la fonction de façon à se ramener à la forme voulue :
   $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ est exactement de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
   On en déduit que $G : x \longmapsto \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+2x+3}$ est une primitive de g sur $[0 ; 1]$.
   Ainsi, $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x^2+2x+3}\right]_0^1 = G(1) - G(0) = \sqrt{\mathbf{6}} - \sqrt{\mathbf{3}}$.

▶ Exercice 35

• Étude de la continuité en 0.

Rappel de cours :

la fonction f est continue en 0 si, et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.
Plus précisément, comme ici la fonction f est définie sur $[0 ; 1[$, f sera continue si $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0)$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, et par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \times \dfrac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$.
La fonction f est donc continue en 0.

• Étude de la dérivabilité en 0.

Rappel de cours :

la fonction f est dérivable en 0 si, et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ est un nombre fini.

Ici, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{1}{X} = 0$ (nombre fini)
On en déduit que **f est dérivable en 0**, et que $f'(0) = 0$.

ϟ Vous pouvez indiquer que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f admet une demi-tangente horizontale en O.

Sujet n°17

▶ Exercice 36

Dans une ville d'environ 45 000 habitants, le maire souhaite restructurer le centre-ville en le rendant plus accessibles aux voitures. Pour convaincre l'ensemble du conseil municipal, il s'appuie sur un sondage réalisé dans la commune qui estime qu'entre 60 % et 80 % des habitants sont favorables à cette restructuration.

Le collectif « *ne touche pas à mon centre-ville* » critique ce sondage.
Dans son tract mensuel, il écrit notamment : « 60 % ou 80 %, ce n'est pas pareil ! ».
Il souhaite qu'un autre sondage soit réalisé mais sur un nombre plus conséquent de personnes.

1. Quel est le nombre de personnes interrogées lors du premier sondage ? (on pourra d'abord indiquer l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95)
2. Combien faut-il interroger au minimum de personnes pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de 0,95 soit d'au maximum 0,1 ?
3. Le maire accède à la requête de ce collectif. Un nouveau sondage est réalisé sur 441 personnes : 329 d'entre elles se déclarent favorable à la restructuration du centre-ville.
   (a) Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 correspondant à ce sondage.
   (b) Suite à ce deuxième sondage, que peut dire le maire lors du prochain conseil municipal ?

▶ Exercice 37

Une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres 5 et 0,2.
Calculer $P(X = 4)$, puis $P(X \geqslant 4)$.

▶ Exercice 38

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Donner l'écriture complexe de :

1. la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;
2. l'homothétie de centre le point A d'affixe i, et de rapport 3.

Correction du sujet n°17

▶ Exercice 36

1. Notons N le nombre de personnes interrogées lors du premier sondage. Comme l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{N}}\,;\,f+\dfrac{1}{\sqrt{N}}\right]$, son amplitude est $f+\dfrac{1}{\sqrt{N}}-\left(f-\dfrac{1}{\sqrt{N}}\right)=\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{N}}}$.

   On a ici $\dfrac{2}{\sqrt{N}}=0,20$ (différence entre 80 % et 60 %)

   On en déduit que $\sqrt{N}=\dfrac{2}{0,2}=10 \iff \boldsymbol{N=100}$

2. On cherche la valeur de N telle que, cette fois : $\dfrac{2}{\sqrt{N}}=0,10 \iff \sqrt{N}=\dfrac{2}{0,1}=20 \iff \boldsymbol{N=400}$

3. Dans l'échantillon des 441 personnes interrogées, 329 sont favorables au projet de restructuration : la fréquence observée est donc $f=\dfrac{329}{441}\simeq 0,746$ (à 10^{-3} près).

   (a) L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est $\left[0,746-\dfrac{1}{441}\,;\,0,746+\dfrac{1}{441}\right]=[0,698\,;\,0,794]$.

   (b) Grâce à l'intervalle de confiance obtenu, on peut considérer que dans l'ensemble de la population de la commune, entre 69,8 % et 79,4 % des habitants est favorable à la restructuration du centre ville.

▶ Exercice 37

Rappel :

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors : pour tout $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$, on a : $p(\mathrm{X}=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

- Ici, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5;0,2)$, donc $p(X=4)=\dbinom{5}{4}\times 0,2^4\times 0,8^1=\mathbf{0,0064}$.
- $p(X\geqslant 4)=p(X=4)+p(X=5)=0,0064+\dbinom{5}{5}\times 0,2^5\times 0,8^0=0,0064+0,00032=\mathbf{0,00672}$.

▶ Exercice 38

Rappel :

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est : $V_m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Dans cet exercice : $V_m=\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\ln(1+1^2)-\ln(1+0^2)=\mathbf{ln(2)}$

Sujet n°18

▶ Exercice 39

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Déterminer le réel m tel que $P(X\leqslant m)=P(X\geqslant m)$.
2. Comparer m avec l'espérance de X.

▶ Exercice 40

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on donne les droites Δ et Δ' de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+t\\ y=1-t\\ z=-7+3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=5-3t'\\ y=1-3t'\\ z=2t'\end{array}\right.,\ t'\in\mathbb{R}$$

1. Les droites Δ et Δ' sont-elles parallèles ? orthogonales ?
2. Les droites Δ et Δ' sont-elles coplanaires ?

Correction du sujet n°18

▶ Exercice 39

• Quelques rappels utiles sur la loi uniforme :

La densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est la fonction constante $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$;
$p(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d f(t)\mathrm{d}t = \frac{d-c}{b-a}$; $p(X \leqslant m) = \displaystyle\int_a^m f(t)\mathrm{d}t = \frac{m-a}{d-a}$; $p(X \geqslant m) = \displaystyle\int_m^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-m}{b-a}$.

• Rappelons aussi – ça ne peut pas faire de mal – ce qu'est une densité de probabilité !

f est une densité de probabilité sur $[a\,;\,b]$ si f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$.

1. On déduit des rappels précédents que :
$$P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) \iff \frac{m-0}{10} = \frac{10-m}{10} \iff m = 10-m \iff 2m = 10 \iff \boldsymbol{m = 5}.$$
2. La densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ est la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{10}$.
L'espérance mathématique de la loi uniforme sur $[0\,;\,10]$ est :
$$\mathrm{E(X)} = \int_0^{10} t f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{10} \frac{t}{10}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{20}\right]_0^{10} = \frac{10^2}{20} - 0 = \mathbf{5}.$$

▶ Exercice 40

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = -7+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 5-3t' \\ y = 1-3t' \\ z = 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. Les droites Δ et Δ' ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix}$.

   • Ces vecteurs ne sont pas colinéaires puisque leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : les droites Δ et Δ' ne sont donc pas parallèles.
   • Le produit scalaire de $\vec{n}$ et $\vec{m}$ est égal à : $1 \times (-3) + (-1) \times (-3) + 3 \times 2 = -3+3+6 = 6$.
   Comme $\vec{n} \cdot \vec{m} \neq 0$, alors les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas orthogonaux, donc les droites Δ et Δ' ne sont pas orthogonales.
2. Pour savoir si Δ et Δ' sont coplanaires (donc pour savoir si elles sont sécantes : elles ne sont pas parallèles), on va chercher les coordonnées de leur point d'intersection éventuel :
$$\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \cap \Delta' \iff \begin{cases} -1+t = 5-3t' & (1) \\ 1-t = 1-3t' & (2) \\ -7+3t = 2t' & (3) \end{cases}$$
On commence par résoudre un système formé des deux équations (1) et (2), puis on testera les solutions trouvées dans l'équation (3) :
• $\begin{cases} -1+t = 5-3t' \\ 1-t = 1-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t+3t' = 6 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} 3t'+3t' = 6 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 1 \\ t = 3 \end{cases}$
• D'une part $-7+3t = -7+3\times 3 = 2$ et d'autre part $2t' = 2 \times 1 = 2$.
Comme $-7+3t = 2t'$, le système admet une solution : les droites Δ et Δ' sont sécantes, donc coplanaires.

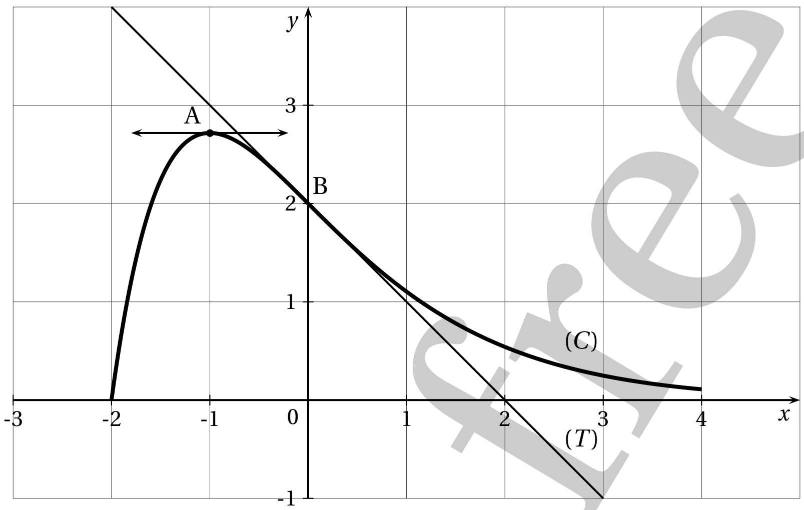
Sujet n°19

▶ Exercice 41

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative (C) d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

On nomme A le point de (C) d'abscisse -1 et B le point de (C) d'abscisse 0.

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2 ; -1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 4]$
- La tangente à (C) au point A est horizontale.
- La droite (T) est la tangente à (C) au point B et a pour équation $y = -x + 2$.



1. (a) Donner les valeurs de $f'(-1)$ et $f'(0)$.
   (b) Quel est le signe de $f'(3)$?
2. Encadrer par deux entiers consécutifs, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unité d'aire.

▶ Exercice 42

Une entreprise fabrique une grande quantité de stylos destinés à être livrés dans des grandes surfaces. On prélève au hasard un stylo dans une importante livraison et on appelle E l'événement « le stylo a un défaut de fabrication ».
On suppose que $p(E) = 0,014$.
On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison. Le nombre important de stylos permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de vingt stylos.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de stylos ayant un défaut de fabrication dans un prélèvement de vingt stylos.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
2. Le directeur de l'entreprise prétend que dans un tel prélèvement, il y a environ trois chances sur quatre qu'aucun stylo n'ait un défaut. A-t-il raison ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux stylos défectueux ?

Correction du sujet n°19

▶ Exercice 41

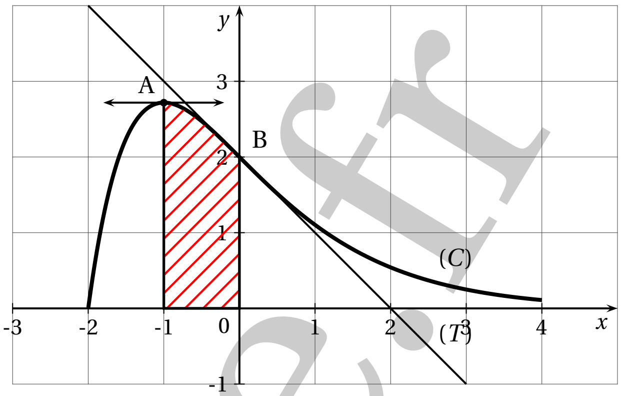
1. (a) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 : cette tangente étant horizontale, son coefficient directeur est égal à 0.
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 : ce coefficient directeur est -1, puisque l'équation de (T) est $y = -x + 2$.
   Conclusion : $\boldsymbol{f'(-1) = 0}$ et $\boldsymbol{f'(0) = -1}$.

(b) Comme f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,4[$, la dérivée f' de f est strictement négative sur cet intervalle, et en particulier pour $x = 3$, on a $\boldsymbol{f'(3) < 0}$.

2. • L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

   • Cette aire, hachurée sur la figure ci-contre, est comprise entre 2 et 3 unités d'aire (une unité d'aire correspond à l'aire d'un carreau).

   • On a donc : $\displaystyle \boldsymbol{2 \leqslant \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3}$.



▶ Exercice 42

1. L'expérience consiste à répéter 20 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli, épreuve à deux issues : *succès* S « obtenir un stylo défectueux » de probabilité $p = 0{,}014$, et *échec* $\overline{\text{S}}$: « obtenir un stylo sans défaut », de probabilité $1 - p = 0{,}986$.
   La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}014$.

2. Pour toute valeur de $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$, on a : $p(\text{X} = k) = \dbinom{20}{k} \times 0{,}014^k \times 0{,}986^{20-k}$.

   La probabilité qu'aucun stylo n'ait un défaut est donc :
   $p(\text{X} = 0) = \dbinom{20}{0} \times 0{,}014^0 \times 0{,}986^{20} = 0{,}986^{20} \simeq \boldsymbol{0{,}754}$, soit à peu près $\dfrac{3}{4}$.
   Le directeur de l'entreprise a donc raison.

3. La probabilité qu'il y ait au moins deux stylos défectueux est égale à :
   $p(\text{X} \geqslant 2) = 1 - p(\text{X} < 2) = 1 - \big(p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1)\big) = 1 - 0{,}754 - 20 \times 0{,}014 \times 0{,}986^{19} \simeq \boldsymbol{0{,}032}$.

Sujet n°20

▶ Exercice 43

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.
On note x_n la probabilité de l'événement R_n.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées
– si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0{,}8$;
– si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0{,}7$.

1. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}7$.

▶ Exercice 44

Soit l'équation (E) : $x^3 - 3x - 4 = 0$.

1. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
2. On souhaite obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
   Après avoir analysé l'algorithme suivant, compléter les pointillés afin de résoudre le problème.

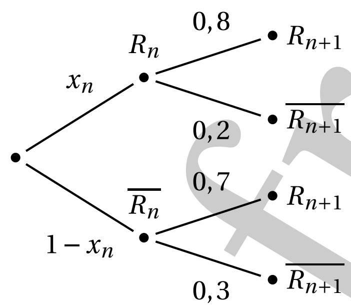
```
VARIABLES x, y : réels

Début
x prend la valeur -1
y prend la valeur x^3-3x-4
TantQue y<0
x prend la valeur ...............
y prend la valeur ...............
Fin TantQue
Afficher [x-0,01 ; x]
Fin
```

Correction du sujet n°20

▶ Exercice 43

À la lecture de l'énoncé, on peut commencer par construire un arbre pondéré :



1. $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0{,}7$.
2. $x_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n \cap R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ *(probabilités totales)*
$x_{n+1} = x_n \times 0{,}8 + (1 - x_n) \times 0{,}7 = \mathbf{0{,}1}\boldsymbol{x_n} + \mathbf{0{,}7}$.

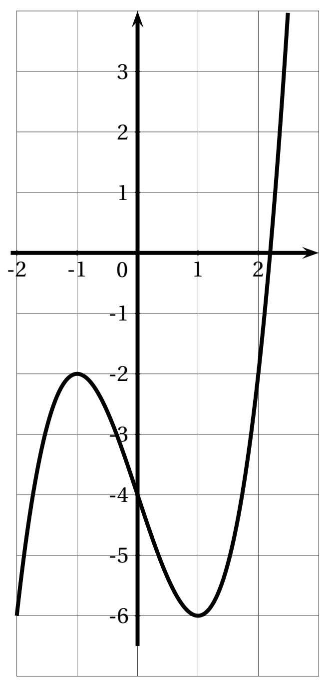
▶ Exercice 44

1. • L'objectif est de démontrer que l'équation (E) : $x^3 - 3x - 4 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.

• Une rapide vision à la calculatrice de la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x - 4$ montre qu'effectivement la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en un seul point, dont l'abscisse semble comprise entre 2 et 3.

• On va devoir utiliser le théorème de la valeur intermédiaire (appelé aussi *théorème de la bijection).*

• Déterminons pour cela les variations de f sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^3 - 3x = 3(x^2 - 1)$ est un polynôme du second degré, de racines évidentes -1 et 1, qui est du signe de $a = 3$ (donc positif) à l'extérieur de ses racines.



On en déduit le tableau complet de variations de f :

La limite d'un polynôme en $-\infty$ et $+\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré, donc :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

• Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1]$, la fonction f, continue, admet pour maximum -2. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle.
• Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante.
L'image de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ est $[-6\,;\,+\infty[$.
Comme $0 \in [-6\,;\,+\infty[$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire (théorème de la bijection), on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1\,;\,+\infty[$.

2. L'algorithme suivant permet de déterminer un encadrement de α au centième :

```
VARIABLES x, y : réels

Début
x prend la valeur 2
y prend la valeur x^3-3x-4
TantQue y<0
x prend la valeur x+0,01
y prend la valeur x^3-3x-4
Fin TantQue
Afficher [x-0,01 ; x]
Fin
```

Pour info, si vous avez le temps (et le courage) de tester cet algorithme sur le logiciel AlgoBox[1], voici l'algorithme qui fonctionne :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  x PREND_LA_VALEUR 2
  y PREND_LA_VALEUR pow(x,3)-3*x-4
  TANT_QUE (y<0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR x+0.01
    y PREND_LA_VALEUR pow(x,3)-3*x-4
    FIN_TANT_QUE
  y PREND_LA_VALEUR x-0.01
  AFFICHER "alpha est compris entre "
  AFFICHER y
  AFFICHER " et "
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Voilà... J'espère sincèrement que ces exercices vous auront aidé ! N'hésitez pas à m'envoyer un mail indiquant comment s'est déroulé votre oral et les exercices que vous avez traités.
Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter la meilleure réussite possible pour votre oral !
Olivier L.

1. AlgoBox est en téléchargement gratuit à cette adresse : http://www.xm1math.net/algobox/