Exercice Mathématiques n°0
Date : 25 / 06 / 2013

par Laurae

Enoncé n°1 (Limites #1)

Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{2x * \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2+1}$

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x)$

Indication (aide) : $\lim\limits_{x\to Z} \dfrac{A}{B} = \lim\limits_{x\to Z} \dfrac{A'}{B'}$ $si \lim\limits_{x\to Z} \dfrac{A}{B} = \dfrac{0}{0}$ $et\ A\ et\ B\ fonctions$

Corrigé n°1

Il faut d'abord déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Il est probable que la fonction f ne soit pas définie en 0, vu que l'énoncé mentionne les limites aux bornes de 0.

Pour tout $x \in \Re$, on a $x^2 + 1 > 0$.
$\sin(1/x)$ est défini pour tout $x \in \Re^*$
f est donc définie sur $\Re^*$.
On peut s'attaquer alors aux limites.

Résolution de la première limite

On cherche à déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On sait que : $2x * \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) = 2 * \dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Avec l'indication : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$ $avec \begin{cases} A = \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) \\ B = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

On en déduit la dérivée de B : $B' = -\dfrac{1}{x^2}$

Et de celle de A également : $A' = -\dfrac{2 * \cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}$

Et donc en conséquence : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{A'}{B'} = \frac{-\frac{2 * cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2 * \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

D'où le résultat suivant : $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2 * 2}{x^2 + 1} = 0$$

Résolution de la seconde limite

On cherche à déterminer : $$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Avec les données précédentes : $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2 * 2}{x^2 + 1} = 0$$

Résolution de la troisième et quatrième limite

Il faut raisonner par encadrement.

Etape 1 : $$-1 \leq \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$$

Etape 2 : $$-2x \leq 2x * \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq 2x : on\ a\ donc\ \lim_{x\to0\pm} 2x * sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

Etape 3 : $$\lim_{x\to0\pm} x^2 + 1 = 1$$

Etape 4 : $$\lim_{x\to0\pm} f(x) = \lim_{x\to0\pm} \frac{2x * sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Indication spéciale :

Comme on a la propriété suivante : $$\lim_{x\to0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

On pourrait vouloir appliquer la formule, sauf qu'il y aurait un problème juste après (comment repasser de 1 à 2 ou vice-versa ?).
L'indication proposée est le théorème de l'Hôpital, que les lycéens utilisent implicitement lors de calculs de limites sous forme de fractions rationnelles.

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12546

de **Excale** » 25 Juin 2013 21:01

En +inf, sin(2/x) ~ 2/x => le haut tend vers 4.

de **mdr1** » 25 Juin 2013 21:35

(21:30:30) mdr1: 2x*sin(2/x)/(x^2+1) = [2x/(x^2+1)]*sin(2/x) et c'est réglé ^^

(21:33:05) mdr1: en gros, 0*0 = 0 ^^

de **Lionel Debroux** » 25 Juin 2013 21:53

Vu que -1 <= sin(x) <= 1, pour x réel, on s'en fiche, du sin, pour le calcul des trois limites, que ce soit en -oo, 0 ou +oo

En -oo et +oo, la fonction est voisine de 2x/x^2, c'est à dire 2/x, limite 0 dans les deux cas.
En 0, on a 2*0*(quelque chose entre -1 et +1)/(0+1), soit également une limite de 0.

de **Bisam** » 26 Juin 2013 13:58

On remarque en premier lieu que f est définie sur R*, et qu'elle est paire.
Ensuite, pour tout x dans R*, on a |f(x)|<=2|x|/(x^2+1).
On peut donc conclure, par le théorème de limite par encadrement (aussi appelé th. des gendarmes) que f(x) tend vers 0 en +oo, en -oo, et en 0.
C'était ce qu'avait dit Lionel... mais un peu brutalement.

Enoncé n°2 (Complexes #1)

Déterminer la valeur exacte de la somme suivante :

$$C = cos\left(\frac{\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{13\pi}{17}\right) + cos\left(\frac{15\pi}{17}\right)$$

Indication : vous pouvez passer par les nombres complexes.

Corrigé n°2

On remarque qu'on est sûr que C soit un nombre réel.
Transformons d'abord la somme C en une somme de nombres complexes, dont on doit déterminer sa partie réelle.

$$C = Re\left(e^{i\frac{\pi}{17}} + e^{i\frac{3\pi}{17}} + e^{i\frac{5\pi}{17}} + e^{i\frac{7\pi}{17}} + e^{i\frac{9\pi}{17}} + e^{i\frac{11\pi}{17}} + e^{i\frac{13\pi}{17}} + e^{i\frac{15\pi}{17}}\right)$$

On remarque une suite géométrique, avec comme premier terme $e^{i\frac{\pi}{17}}$, et de raison $e^{i\frac{2\pi}{17}}$.

En conséquence, on en déduit que par multiplication du numérateur par $e^{i\frac{8\pi}{17}}$ et du dénominateur par $e^{i\frac{\pi}{17}}$:

$$C = Re\left(e^{i\frac{\pi}{17}} * \left(\frac{1 - e^{i\frac{16\pi}{17}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{17}}}\right)\right) = Re\left(e^{i\frac{8\pi}{17}} * \left(\frac{e^{i\frac{8\pi}{17}} - e^{-i\frac{8\pi}{17}}}{e^{i\frac{\pi}{17}} - e^{-i\frac{\pi}{17}}}\right)\right)$$

En appliquant la formule d'Euler qui dit que :

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \quad et \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

On a alors :

$$C = Re\left(e^{i\frac{8\pi}{17}} * \left(\frac{sin\left(\frac{8\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)}\right)\right) = \frac{cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) * sin\left(\frac{8\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{\frac{1}{2} * sin\left(\frac{16\pi}{17}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{17}\right)} = \frac{1}{2}$$

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12556

de **critor** » 26 Juin 2013 12:06

Je crois que l'on doit pouvoir s'en sortir sans nombres complexes à un niveau Première S en faisant appel aux formules des angles associés du style cos(Pi-x)=-cos(x)

de **nikitouzz** » 26 Juin 2013 13:23

Donc on a :
0.5(exp(-i*pi/17)+exp(i*pi/17) + exp(-3*i*pi/17)+exp(3*i*pi/17) + exp(-5*i*pi/17)+exp(5*i*pi/17) + exp(-7*i*pi/17)+exp(7*i*pi/17) + exp(-9*i*pi/17)+exp(9*i*pi/17) + exp(-11*i*pi/17)+exp(11*i*pi/17) + exp(13*-i*pi/17)+exp(13*i*pi/17) + exp(-15*i*pi/17)+exp(15*i*pi/17))

Donc :
Determinons sa partie reel :
exp(i*pi/17)+exp(3*i*pi/17)+exp(5*i*pi/17)+exp(7*i*pi/17)+exp(9*i*pi/17)+exp(11*i*pi/17)+exp(13*i*pi/17)+exp(15*i*pi/17))

On peut voir grace a hayleia que la suit est geometrique (6 bonne minute pour trouver la raison et toussa --')
de raison : exp(2*i*pi/17) et de premier therme : exp(i*pi/17)

on en deduis donc que la suite que nous appelerons Fn est egale a :
exp(i*pi/17)*exp(2*i*pi/17)^n or ici on a n qui vaut 9 donc :
S(F8)=exp(i*pi/17) * (1-exp(16*i*pi/17) / 1-exp(2*i*pi/17))

on peut l'ecrire sous la forme :
(1+exp(i*pi/17)) / (1-exp(2*i*pi/17)

Donc ca s'ecrit sous la forme :
1/(1-sqrt17(-1))
ce qui nous donne 1/2

OUFFFFFFFFFFFFFFF (j'ai du m'aider de la calculette pour la fin ^^)

de **mdr1** » 26 Juin 2013 13:53

On notera que cette sotte de calculatrice croit qu'il s'agit là d'une valeur approchée et qu'elle renvoie simplement le même calcul si l'on ne fait pas CTRL+ENTER. Même si on la force à passer par les complexes en sommant les exponentielles complexes puis en prenant la partie réelle.

de **Adriweb** » 26 Juin 2013 14:03

Je confirme les dires de Nikitouzz (du moins le résultat.....) avec WolframAlpha / Mathematica

Au fait, c'est égal à **Cos[Pi/17] - Cos[(2*Pi)/17] + Cos[(3*Pi)/17] - Cos[(4*Pi)/17] - Sin[Pi/34] + Sin[(3*Pi)/34] - Sin[(5*Pi)/34] + Sin[(7*Pi)/34]**

de **Bisam** » 26 Juin 2013 14:24

C'est un très bon exercice de révision pour les futurs Sup...
On revoit les formules d'Euler et la somme des termes d'une suite géométrique.

La méthode de nikitouzz est donc très bonne... mais la rédaction (je ne parle pas de l'orthographe !) est loin du standard attendu au-delà du Lycée !

En revanche, je doute franchement qu'on puisse s'en sortir sans les complexes.

de **Bisam** » 29 Juin 2013 21:47

Par contre, ça vient de me donner une piste pour l'adapter à des 1ère (il faut quand même qu'ils connaissent les formules d'addition du sinus...)
Voici la marche à suivre :
On pose t=pi/17 pour simplifier et S la somme recherchée.
1) Pour chaque k entier, exprimer 2*cos((2k+1)t)*sin(t) comme la différence de 2 sinus.
2) En déduire que 2*S*sin(t)=sin(16t)
3) En déduire S.

Enoncé n°3 (Suites #1)

Démontrez l'égalité suivante :

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n * (n+1)}{2}$$

Démontrez l'égalité suivante :

$$B_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}$$

En déduire une relation similaire pour les cubes en utilisant la méthode de résolution de l'égalité précédente :

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = ?$$

Indication : Etant donné le nombre de résolutions possibles pour ce problème, nous utiliserons les réponses postées sur le forum. La méthode proposée ici est destinée aux lycéens en classe de Première.

Corrigé n°3

Première égalité

On cherche à démontrer que :

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n * (n+1)}{2}$$

L'astuce est ici de faire deux sommes symétriques l'une de l'autre par commutativité :

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n$$
$$A_n = n + n - 1 + \cdots + 3 + 2 + 1$$
$$2A_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) \ldots . = n * (n+1)$$
$$A_n = \frac{n * (n+1)}{2}$$

On a donc bien le résultat voulu.

Seconde égalité

On cherche à démontrer que :

$$B_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$$

La formule du binôme de Newton (ou par développement sans la formule) nous permet d'affirmer que :

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

En faisant des itérations successives :

$$1^3 = (0+1)^3 = 0^3 + 3*0^2*1 + 3*0*1^2 + 1^3$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3*1^2*1 + 3*1*1^2 + 1^3$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3*2^2*1 + 3*2*1^3 + 1^3$$

…

$$(n-1)^3 = (n-2+1)^3$$
$$= (n-2)^3 + 3*(n-2)^2*1 + 3*(n-2)*1^2 + 1^3$$
$$n^3 = (n-1+1)^3 = (n-1)^3 + 3*(n-1)^2*1 + 3*(n-1)*1^2 + 1^3$$
$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3*n^2*1 + 3*n*1^2 + 1^3$$

Et en faisant la somme :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= 0^3 + 3*(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) + 3 \\ &* (0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1) \\ &= 0 + 3*B_n + 3*A_n + (n+1)\end{aligned}$$

Car on sait que :

$$A_n = \frac{n*(n+1)}{2}$$

En conséquence, on a :

$$(n+1)^3 = 3*(A_n + B_n) + (n+1)$$
$$(A_n + B_n) = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3}$$
$$B_n = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - A_n$$
$$B_n = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{n*(n+1)}{2}$$
$$B_n = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$$

par Laurae

Troisième égalité

On cherche à trouver le « ? » :

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = ?$$

En refaisant de manière similaire le début de démonstration de la troisième égalité, on trouve normalement l'égalité suivante :

$$(n+1)^4 = 4 * C_n + 6 * B_n + 4 * A_n + (n+1)$$

En reprenant les deux dernières démonstrations, on en déduit que :

$$C_n = \frac{(n+1)^4 - \big(6 * B_n + 4 * A_n + (n+1)\big)}{4}$$

$$C_n = \frac{n^4 + 2 * n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2 * (n+1)^2}{4}$$

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12570

de **Marka** » 27 Juin 2013 13:49

Salup,
Première égalité (je rassemble les membres)
An = 1 +2+3+...+(n-1) + n
An = n + (n-1) + (n-2) +...2+1
On rassemble les membres de la ligne du dessus et de la ligne du dessous et on obtient 2An
Donc 2An = n+1 +n+1 ....+ +n+1+ n+1 et ceci n fois
Soit 2An = n(n+1)
D'Ou An = n(n+1)/2

Bon on pouvait faire par récurrence
(Comme je dois y aller je ferais le reste en EDIT)

de **Hayleia** » 27 Juin 2013 13:53

Vive les récurrences (il y a sûrement mieux, mais comme le disait ma prof de maths de 2e et de 1e, "on ne change pas une méthode qui gagne").

Récurrence:
Initialisation: 1=1*(1+1)/2
Heredité: 1+...+n=(1+...+(n-1))+n=(n-1)n/2+n=((n-1)n+2n)/2=(n(n+1))/2

Récurrence:
Initialisation: 1^2=1(1+1)(2*1+1)/6
Heredité: 1^2+...+n^2=(1^2+...+$(n-1)^2$)+n^2=((n-1)n(2(n-1)+1))/6+n^2=n(n+1)(2n+1)/6

Récurrence:
Initialisation: 1^3=$1^2(1+1)^2$/4
Heredité: 1^3+...+n^3=(1^3+...+(n-1)^3)+n^3=$(n-1)^2n^2$/4+n^3=$n^2(n+1)^2$/4

de **nikitouzz** » 27 Juin 2013 14:07

I)recurrence :
Inititialisations, pour n=1 on a An=1 puis 1*(1+1)/2=1=An
Heredité, 1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1) = n(n+1)/2+2(n+1)/2 = (n+1)(n+2)/2 = (n+1)((n+1)+1)/2

II) recurrence :
Inititialisations, pour n=1 on a Bn=1 puis 1*(1+1)*(2+1)/6=1=Bn
Heredité, 1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2 = (n*(n+1)*(2n+1))/6 + (n+1)^(n*(n+1)*(2n+1))/6+(n+1)^2 = (n*(n+1)*(2n+1))/6+6(n+1)^2/6 = (n*(n+1)*(2n+1)+6(n+1)^2)/6 = ((n+1)*(n+2)*(2(n+1)+1))/6

III) 1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2=((n+1)((n+1)+1)/2)^2 de **Bisam** » 29 Juin 2013 21:31

Pour la dernière démonstration, regardez suffisamment longtemps cette image... et comprenez...

Enoncé n°4 (Prépa #1)

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme f_n dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) avec n réel est :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & 1 & n \end{bmatrix}$$

Déterminer pour quelles valeurs de n l'endomorphisme f_n est diagonalisable.

Corrigé n°4

$e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $n + 3$ car $f_n(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (n + 3)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
On a donc $rg\ f_n = 1$.
Le sous-espace Esp_0 associé à 0 est alors $\ker f_n$ et sa dimension est la suivante : $4 - rg\ f_n = 3$.

Distinguons deux cas différents :
$n \neq -3$ et $n = -3$.

Premier cas : $n \neq -3$
$Esp_0 + Esp_{n+3}$ est directe, donc :

$$\dim(Esp_0 \oplus Esp_{t+3}) = \dim Esp_0 + \dim Esp_{n+3} \leq 1$$

Or, on sait que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \in E_{n+3}$ d'où $\dim Esp_{n+3} = 1$, donc elle est diagonalisable dans ce cas.

Second cas : $n = -3$
La multiplicité de la valeur propre 0 de f_n est au moins égale à 3, donc la somme de toutes les valeurs propres avec leur multiplicité est nul, on a donc $Tr\ A_{-3} = 0$. Comme f_n n'est pas nul, et comme 0 est la seule valeur propre de f_n, alors f_n n'est pas diagonalisable.

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12573

de **Hayleia** » 27 Juin 2013 17:50

En fait, dans ta méthode je changerais juste le début.

On sait que le polynôme caractéristique est det(A-t*I), donc en suivant ces étapes:
- c1+c2+c3+c4→c1
- factorise par (3-t+n)
- c1-c2→c1
- développement du det par rapport à c1
- Sarrus sur le déterminant d'ordre 3

on trouve que ce polynôme est (au signe près, mais de toute façon ce qui nous intéresse c'est ses racines): $(t-(n+3))*t^3$

On étudie donc Esp(0). on suppose que (a,b,c,d) appartient à Ker(An), et on a que (a,b,c,d)=(-b-c-dn,b,c,d) donc dim(Ker(An))=3.

Ensuite effectivement j'étudierais les cas n=-3 et n≠-3 comme tu l'as fait.

Ma méthode est plus longue, mais elle me semble plus claire et moins "coup de chance". Donc si on veut appliquer le "on ne change pas une méthode qui gagne", ma méthode est mieux, mais question efficacité, je conviens que la tienne est beaucoup mieux.

On peut éviter presque tout calcul avec le raisonnement suivant :

Les 4 colonnes de la matrice An sont proportionnelles à la 1ère qui est non nulle donc le rang vaut 1 donc, par le théorème du rang, on en déduit que le noyau est de dimension 3. Par conséquent, 0 est valeur propre de multiplicité au moins 3.

Pour connaître la dernière valeur propre, on utilise la trace qui est la somme de toutes les valeurs propres et qui vaut n+3. Ainsi la dernière valeur propre vaut n+3.

Si n=-3, la valeur propre 0 est de multiplicité 4, différente de la dimension du noyau donc An n'est pas diagonalisable.
Sinon, n+3 est forcément de multiplicité 1 et 0 de multiplicité 3, valeurs des dimensions des espaces propres respectifs, donc An est diagonalisable.

On peut même trouver une base de diagonalisation presque sans calcul également...

C'est le même type de raisonnement que celui de Laurae, mais il montre que l'on connaît parfaitement son cours car on utilise beaucoup de notions reliées les unes aux autres. De plus, il évite le résultat "parachuté" en 1ère ligne de la réponse de Laurae... même si ici, c'est plutôt évident !

Enoncé n°5 (Limites #2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-a_1} + \dfrac{1}{x-a_2} + \cdots + \dfrac{1}{x-a_{n-1}} + \dfrac{1}{x-a_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x-a_k} \\ a_1 < a_2 < \cdots a_{n-1} < a_n \\ a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Déterminez le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Corrigé n°5

On ne peut pas déterminer les solutions de manière classique.

Commençons par dériver f, qui est définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, afin d'obtenir le tableau de variations de f.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a_1)^2} + \frac{-1}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{-1}{(x-a_{n-1})^2} + \frac{-1}{(x-a_n)^2}$$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{(x-a_1)^2} + \frac{1}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x-a_{n-1})^2} + \frac{1}{(x-a_n)^2}\right)$$

D'où : $f'(x) < 0$, donc décroissante sur chaque intervalles continues dans l'ensemble de définition de f qui est D_f, en l'occurrence cet ensemble :

$$D_f =]-\infty, a_1[\cup]a_1, a_2[\cup \dots \cup]a_{n-2}, a_{n-1}[\cup]a_{n-1}, a_n[\cup]a_n, +\infty[$$

Car on sait que $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sont des valeurs interdites (voir plus haut dans le corrigé).

On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ a_1	a_2	a_3	a_4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f	? ↘ ?	? ↘ ?	? ↘ ?	? ↘ ?	? ↘ ?

Il s'agit alors de déterminer les « ? ».

Déterminons les limites en $+\infty$, $-\infty$, a_k^+, a_k^-.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_{n-1}}+\frac{1}{x-a_n}\right)\\ &= 0+0+\cdots+0+0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_{n-1}}+\frac{1}{x-a_n}\right)\\ &= 0+0+\cdots+0+0=0\end{aligned}$$

Il est légèrement plus compliqué de trouver les deux autres limites.

Soit $k_1 \in \{1,2,\dots,n-1,n\}$ et $k_2 \in \{1,2,\dots,n-1,n\}$.
Pour tout $k_1 \neq k_2$, on a alors $a_{k_1} \neq a_{k_2}$ car $a_1 < a_2 < \cdots a_{n-1} < a_n$.

En conséquence :

$$\lim_{x\to a_{k_1}} f(x) = \frac{1}{x-a_{k_2}} = \frac{1}{a_{k_1}-a_{k_2}}$$

Et vu qu'on a :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a_{k_1}^+} \dfrac{1}{x-a_{k_1}} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a_{k_1}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a_k^+} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to a_{k_1}^-} \dfrac{1}{x-a_{k_1}} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a_{k_1}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_k^-} f(x) = -\infty\end{cases}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	a_1	a_2	a_3	a_4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
f	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

On en déduit du tableau de variations les affirmations suivantes si $y \neq 0$:
- si $y > 0$, l'équation $f(x) = y$ possède une solution unique sur chacun des intervalles continus $]a_n, a_{n+1}[$ et une solution unique sur le dernier intervalle continu $]a_n, +\infty[$
- si $y < 0$, l'équation $f(x) = y$ possède une solution unique sur chacun des intervalles continus $]a_n, a_{n+1}[$ et une solution unique sur le premier intervalle continu $]-\infty, a_1[$

Si $y = 0$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur chacun des intervalles continus $]a_n, a_{n+1}[$.

La solution au problème est alors :
- pour $y \neq 0$, l'équation $f(x) = y$ possède n solutions dans $\mathbb{R}$
- pour $y = 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède $n - 1$ solutions dans $\mathbb{R}$

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12578

de **Hayleia** » 28 Juin 2013 14:25

Supposons y>0
Soit j dans {1,...,n-1}
On a:
-limite quand x tend vers a(j) de f(x)=+l'infini
-limite quand x tend vers a(j+1) de f(x)=-l'infini
-f est continue sur]a(j),a(j+1)[
Donc d'après le TVI étendu, il existe cj dans]a(j),a(j+1)[tel que f(cj)=y
Ça nous fait n-1 solutions (les cj sont deux à deux différents car se trouvent dans des intervalles disjoints).
Mais il y en a encore une sur]a(n),+l'infini[avec un raisonnement du même type.

Supposons y<0
Recopier la démo précédente, mais cette fois avec la dernière solution sur]-l'infini,a(1)[

Supposons y=0
Toujours la même démo pour les n-1 solutions.
Sauf que là, il n'y en a pas d'autre. En effet, par dérivation, la dérivée de f est toujours strictement négative donc f est décroissante. De plus, limite en a(n)=+l'infini et limite en +l'infini=0 donc pour tout x dans]a(n),+l'infini[, f(x)>0 (donc non égal à zero), et pareil sur]-l'infini,a(1)[.

Enoncé n°6 (Limites #3)

Déterminez la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - n}{x}$$

Avec :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \cos(2 * i * x) \ \ et\ n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

Corrigé n°6

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} -2\mathrm{i} * \sin(2 * i * x)$$

On a la relation suivante :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{i=1}^{n} -2\mathrm{i} * \sin(0) = 0$$

Car on peut déterminer $f(0)$:

$$f(0) = \sum_{i=1}^{n} \cos(0) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Et on avait donc répondu à la question demandée :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - n}{x} = 0$$

Exercice Mathématiques n°6
Date : 28 / 06 / 2013

par Laurae

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12581

de **mdr1** » 28 Juin 2013 17:04

En 0 : cos(k*x) = 1+o(x^2) (quel que soit k>0) donc la somme donne n + o(x^2), avec le -n, on a o(x^2), divisé par x : o(x) donc la limite vaut 0.

de **Bisam** » 29 Juin 2013 20:16

Bien vu, mdr1.
Pour rester accessible à des Terminales, je propose cette solution :

Pour tout i, cos(2*i*x)-1 = -2*$\sin^2$(i*x).
Donc f(x)-n = -2*sum($\sin^2$(i*x),i=1..n).
Or sin(y)/y tend vers 1 en 0 sonc $\sin^2$(y)/y=sin(y)*sin(y)/y tend vers 0.
Donc (f(x)-n)/x = -2*sum(i*($\sin^2$(i*x)/(i*x)),i=1..n) tend vers 0 par opérations sur les limites.

Pour aller plus loin, il est plus intéressant de déterminer la limite de (f(x)-n)/x^2 en 0...

Enoncé n°7 (Suites #2)

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!}$$

Démontrer que cette suite est convergente.
Les démonstrations par récurrences utilisées n'ont pas à être justifiées (choisissez une suite géométrique qui vous semble la plus adaptée).

Corrigé n°7

Démontrons d'abord que la suite (u_n) est majorée.

Utilisons la suite (v_n) suivante :

$$v_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2^{i-1}}$$

Qui, d'après démonstration par récurrence (non demandé, d'autres suites géométriques pouvaient être utilisées) :

Soit la relation suivante, propriété X_n avec $(n > 0)$:

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour $n = 1$, on a $1 \le 1$, donc vrai pour l'initialisation.

On suppose alors la propriété X_n vraie pour un entier n, d'où :

$$X_n \; dit \; que \; : \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^{n-1}} * \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^{n-1}} * \frac{1}{2} \; par \; hypothèse \; car \; \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} \; et \; majoration$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$$

Donc la propriété X_n est vraie au rang $n + 1$.

On a donc :

$$\frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

Par somme, on a alors :

$$u_n \leq v_n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2^{i-1}}$$

D'où par suite géométrique et simplification :

$$u_n \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow u_n \leq 2 - 2 * \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow u_n \leq 2 * \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Mais on a : $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ positif d'où $u_n \leq 2$

Donc (u_n) est majorée par 2.

Il reste le sens de variation à étudier :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

On peut donc affirmer que (u_n) est convergente car elle est croissante et majorée.

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12596

> de **Bisam** » 01 Juil 2013 19:53
>
> Une méthode possible pour montrer la convergence est de prouver que la suite u est croissante, tandis que la suite v définie par v(n)=u(n)+1/(n*n!) est décroissante et adjacente à u.
> Malheureusement, les suites adjacentes ne sont plus au programme de Terminale...

Enoncé n°8 (Spécialité #1)

Résoudre l'équation suivante avec les contraintes ci-dessous :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = n \\ n \text{ nombre entier premier} \\ x \text{ et } y \text{ entiers} \end{cases}$$

Corrigé n°8

Par factorisation, on a : $n = (x + y)(x - y)$.
La contrainte sur n (nombre entier premier) permet d'affirmer que l'un des deux facteurs issus de la factorisation est égal à 1.

Les deux possibilités sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} 1 - 2y = n \\ 1 + 2y = n \end{cases}$$

Or, un nombre premier n'est pas pair (sauf pour 2), les solutions de l'équation sont donc :

$$\left\{\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1-n}{2}\right); \left(\frac{1+n}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\right\}$$

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12599

de **Marka** » 01 Juil 2013 14:30

Salup,
(x-y)(x+y) = n
n est un nombre entier premier donc (x-y) = 1 ou (x+y) = 1
soit x = y +1 ou x = -y +1
Si x = y +1 alors (x-y)(x+y) = n ssi 1(2y+1) = n ssi y = (n-1)/2
Si x = 1 -y alors (x-y)(x+y) = n ssi (1-2y)1 = n ssi y = (1-n)/2
EDIT : Je termine pas j'avais trouvé na !
Dernière édition par Marka le 01 Juil 2013 14:44, édité 2 fois.

par Laurae

Enoncé n°9 (Spécialité #2)

Soients $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation suivante :

$$x^y = y^x$$

Corrigé n°9

Il faut faire un travail préalable pour cadrer la résolution de l'équation.
Soient les décompositions de x et y telles que P_n soient des nombres premiers et que $0 \leq a_i$ et $0 \leq b_i$:

$$\begin{cases} x = P_1^{a_1} * P_2^{a_2} * \ldots * P_{n-1}^{a_{n-1}} * P_n^{a_n} \\ y = P_1^{b_1} * P_2^{b_2} * \ldots * P_{n-1}^{b_{n-1}} * P_n^{b_n} \end{cases}$$

L'équation nous indique que $x^y = y^x$, d'où pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n-1,n\}$, on a $a_i y = b_i x$.
Dés lors que $x \leq y$, on a alors pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n-1,n\}$, $a_i y \leq b_i x$.
En conséquence, on a $x|y$.
On peut donc affirmer que m via $y = m * x$, x est la solution de la nouvelle équation équivalente suivante :

$$x^{m+1} = m$$

Il s'agit maintenant de déterminer les solutions de l'équation proposée.

Lorsqu'on a $x \geq 2$ et $m > 2$, on en déduit que $x^{m-1} \geq 2^{m-1} > m$.

Par conséquent, deux cas sont à traiter séparément :
- si $x \geq 2$ est une solution, alors $m \leq 2$, d'où les solutions $x = 2$ et $m = 2$, mais aussi $x \geq 2$ et $m = 1$.
- si $x < 2$ est solution, alors $m = 1$ est la seule solution.

Les solutions à l'équation sont donc :

$$\{(2,4),(4,2),(x,y)\}$$

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12601

de **Marka** » 01 Juil 2013 17:16

Deuxième méthode (ça trouve la majorité des solutions càd x=y (mais pas les couples {2,4} et {4,2})) (bon ma méthode utilise pas trop les outils de spé):
x^y = y^x
ssi ln(x^y) = ln(y^x) (car à x on associe ln(x) est croissante sur 0;+inf (bornes ouvertes) et car x et y sont des entiers positifs)
ssi yln(x) = xln(y)
ssi ln(x)/x = ln(y)/y
ssi x = y
Voilà
Reste à trouver les couples {2,4} et {4,2} (qui marchent également dans l'expression ln(x)/x = ln(y)/y ..)

de **Hayleia** » 01 Juil 2013 19:12

Marka a écrit:
ssi ln(x)/x = ln(y)/y
ssi x = y

Ça ne marche que si x→ln(x)/x est bijective, ce qui n'est sûrement pas le cas puis que justement il manque les solutions {2,4} et {4,2} comme tu le dis à la fin. En fait je pense plutôt que l'étude de ln(x)/x = ln(y)/y va donner des solutions qui ne seront entières que pour {2,4} et {4,2}.

de **Bisam** » 02 Juil 2013 15:22

La solution de Marka est PRESQUE bonne.
En fait, il faudrait faire une étude de la fonction f:x->ln(x)/x pour étudier le nombre de solutions de ln(x)/x=Z, en discutant suivant Z.
Pour être plus précis qu'Hayleia, c'est l'injectivité de la fonction f qui fait défaut, ici.

Par ailleurs, en pièce jointe, je vous propose la solution donnée par Laurae, mais en plus propre.

Corrigé exo Laurae – Spécialité #2

Énoncé

Résoudre l'équation $(E):\ x^y = y^x$, où $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Solution

Il est clair que tout couple (x,x), pour $x \in \mathbb{N}^*$ est solution de (E) et on vérifie facilement que $(2{,}4)$ et $(4{,}2)$ sont aussi solution. Montrons qu'il n'y a pas d'autre solution.

On remarque que si (x,y) est solution alors (y,x) l'est aussi, donc on peut sans perte de généralité ne chercher que les couples (x,y) solution tels que $x \leq y$ et puisque l'on sait que (x,x) est solution, on peut s'intéresser uniquement au cas où $x < y$.

Considérons donc un couple (x,y) solution de (E) tel que $x < y$.
Alors x et y peuvent tous deux se décomposer en facteurs premiers, sous la forme $x = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$ et $y = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_n^{\beta_n}$, les (α_i) et (β_i) pouvant éventuellement être nuls.
Puisque $x^y = y^x$, par unicité de la décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers, on en déduit que pour tout i de 1 à n, on a $\alpha_i y = \beta_i x$, et puisque $x < y$, on en déduit que $\alpha_i y = \beta_i x \leq \beta_i y$ donc puisque $y > 0$, on en déduit que $\alpha_i \leq \beta_i$.
Par conséquent, x divise y. On note m le quotient de y par x, qui est supérieur ou égal à 2 puisque $y > x$.

On a donc $x^{mx} = (mx)^x$ d'où $(x^x)^m = m^x(x^x)$ donc $m^x = (x^x)^{m-1} = (x^{m-1})^x$ et puisque x n'est pas nul, on en déduit que $x^{m-1} = m$.
Si $m = 2$ alors $x = 2$ et $y = 4$, on retrouve le couple solution déjà trouvé.
Donc si $x > 2$ alors $m > 2$ et $x^{m-1} > 2^{m-1} > m$, la dernière inégalité se prouvant par récurrence sur m.

Donc les seuls couples solutions sont bien ceux trouvés au départ.

Enoncé n°10 (Suites #3)

Démontrez la convergence de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$.

$$u_n = \left(\frac{1}{3} * \left(\sin\left(\frac{1}{n^7}\right) + \cos(n^6)\right)\right)^n$$

Corrigé n°10

En décomposant la suite (u_n), on a :

$$u_n = \left(\frac{1}{3} * \sin\left(\frac{1}{n^7}\right) + \frac{1}{3} * \cos(n^6)\right)^n = (v_n + w_n)^n$$

Avec :

$$\begin{cases} v_n = \frac{1}{3} * \sin\left(\frac{1}{n^7}\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ w_n = \frac{1}{3} * \cos(n^6) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On en déduit que la suite (v_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0.
On sait les propriétés suivantes (qui vont nous servir plus tard) :

$$\begin{cases} -1 \leq \sin(n) \leq 1 \\ -1 \leq \cos(n) \leq 1 \end{cases}$$

Donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq m$, on ait :

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} * \sin\left(\frac{1}{n^7}\right) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq v_n \leq \frac{1}{3}$$

En rajoutant w_n aux trois membres de l'inéquation, on obtient :

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{1}{3} * \sin\left(\frac{1}{n^7}\right) + \frac{1}{3} * \cos(n^6) \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq v_n + w_n \leq \frac{2}{3}$$

En passant à la puissance n, on a alors :

$$(v_n + w_n)^n \leq \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| \Leftrightarrow u_n \leq \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n\right|$$

Donc (u_n) converge, et plus précisément vers 0.

Exercice Mathématiques n°10
Date : 03 / 07 / 2013

par Laurae

Topic sur TI-Planet :
http://tiplanet.org/forum/viewtopic.php?f=67&t=12607

de **Bisam** » 04 Juil 2013 11:16

En 2 lignes, on écrit que :
Pour tout n dans N*, abs(sin(1/n^7)+cos(n^6))<=2 par l'inégalité triangulaire donc abs(un)<=(2/3)^n, ce qui permet de conclure avec le théorème de convergence par encadrement (dit "des gendarmes").