

# Fonctions de plusieurs variables

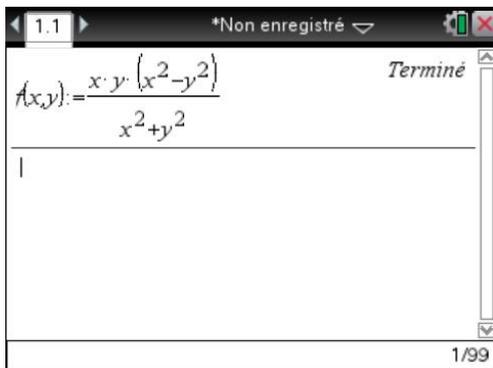
La TI-Nspire CAS permet de manipuler très simplement les fonctions de plusieurs variables. Nous allons voir dans ce chapitre comment procéder, et définir quelques fonctions particulièrement utiles.

On pourra également se reporter au **chapitre 15** pour une description de la bibliothèque de programmes **diffcalc**, téléchargeable sur le site [www.univers-ti-nspire.com](http://www.univers-ti-nspire.com).

## 1. Fonctions à valeurs réelles

### 1.1 Définition

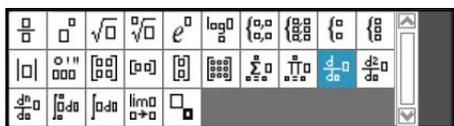
On procède comme pour une fonction d'une variable :



### 1.2 Calcul de dérivées partielles

On peut ensuite facilement faire des calculs de dérivées partielles.

Voici par exemple le calcul de  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  pour  $(x,y) \neq (0,0)$ . Pour entrer ces expressions, on utilise les modèles disponibles sur la TI-Nspire CAS :



1.1 \*Non enregistré

$$f(x,y) = \frac{x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Terminé

$$\frac{d}{dx}(f(x,y)) = \frac{(x^4 + 4 \cdot x^2 \cdot y^2 - y^4) \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

1.1 \*Non enregistré

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) = \frac{-4 \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot y^2) \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

Aucun problème pour le calcul de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , on peut utiliser le second modèle en entrant l'ordre dans la case du haut. On peut également utiliser directement la fonction de dérivation  $d$  et indiquer l'ordre comme troisième argument.

Par contre, pour le dernier calcul, on doit imbriquer deux appels de la fonction de dérivation.

1.1 \*Non enregistré

$$\frac{d}{dx}(f(x,y)) = \frac{(x^4 + 4 \cdot x^2 \cdot y^2 - y^4) \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y)) = \frac{-4 \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot y^2) \cdot y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$r(x,y) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))$$

3/99

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

1.1 \*Non enregistré

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dx}(f(x,y)) \right) = \frac{-(y^6 + 9 \cdot y^4 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 \cdot x^4 - x^6)}{(y^2 + x^2)^3}$$

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

### 1.3 Calcul des dérivées partielles en un point donné

Pour calculer ce type d'expression, utilisez l'opérateur "sachant que". Une autre solution consiste à définir  $r$  comme une fonction de  $x$  et  $y$ , ce qui permet ensuite de calculer facilement sa valeur en un point donné :

Voici par exemple, le calcul de  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  en  $(x,y) = (1,2)$  :

1.1 \*Non enregistré

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))|_{x=1 \text{ and } y=2} = \frac{352}{125}$$

Terminé

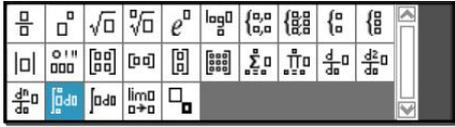
$$r(x,y) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x,y))$$

$$r(1,2) = \frac{352}{125}$$

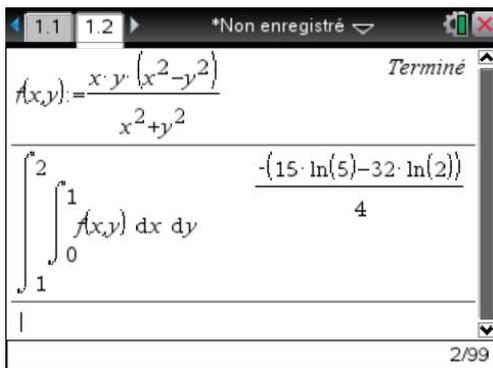
Le domaine du résultat peut être plus grand ... 1/8

## 1.4 Intégrales multiples

Pour calculer une intégrale multiple, il est nécessaire d'imbriquer le calcul d'intégrales simples. On peut là aussi utiliser directement la fonction d'intégration obtenue dans le catalogue, ou utiliser le modèle ou le menu **Analyse**.



Voici par exemple le calcul de  $\iint_{[0,1] \times [1,2]} f(x,y) dx dy$  :



## 1.5 Gradient, tangente, plan tangent

Ces calculs ne posent aucun problème.

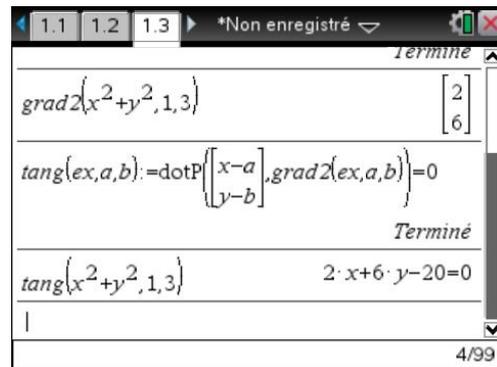
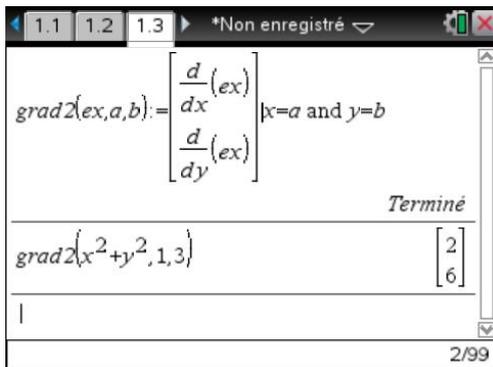
Si vous utilisez souvent ces notions vous pourrez facilement définir les fonctions nécessaires.

Voici par exemple les fonctions permettant de calculer le gradient d'une fonction  $f$  et la tangente à une courbe définie par  $f(x,y) = C$  en un point  $(a,b)$ .

$$\text{grad2}(ex,a,b):=[ d(ex,x); d(ex,y)]|_{x=a \text{ and } y=b}$$

$$\text{tang}(ex,a,b):=\text{dotP}([x-a;y-b],\text{grad2}(ex,a,b))=0$$

☞ **dotP** est la fonction permettant de calculer un produit scalaire.



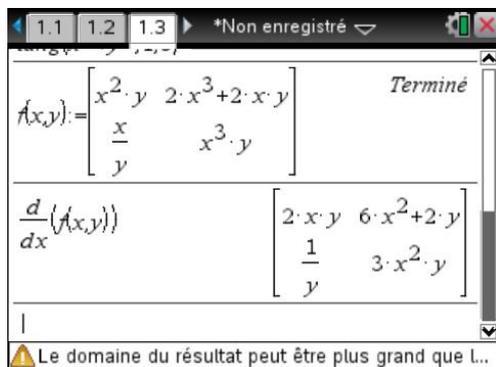
La généralisation à la dimension 3 (gradient et plan tangent) est immédiate :

$$\text{grad3}(ex,a,b,c):=[ d(ex,x); d(ex,y); d(ex,z)]|_{x=a \text{ and } y=b \text{ and } z=c}$$

$$\text{ptan}(ex,a,b,c):=\text{dotP}([x-a;y-b;z-c],\text{grad3}(ex,a,b,c))=0$$

## 2. Fonctions à valeurs vectorielles

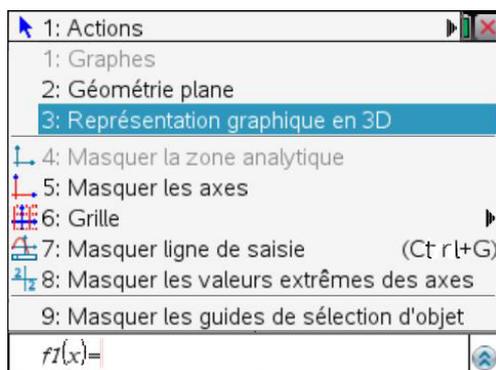
Les calculs sur les fonctions vectorielles se font aussi simplement que ceux sur les fonctions à valeurs réelles. En effet la TI-Nspire CAS est parfaitement capable de dériver en une seule opération un vecteur ou même une matrice.



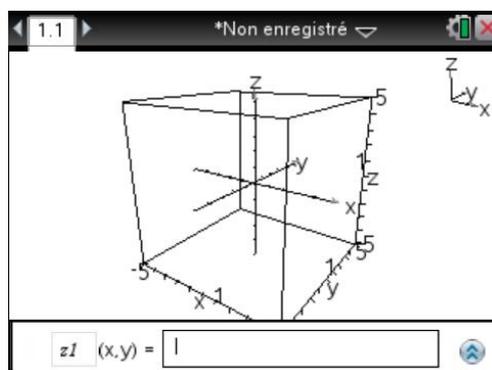
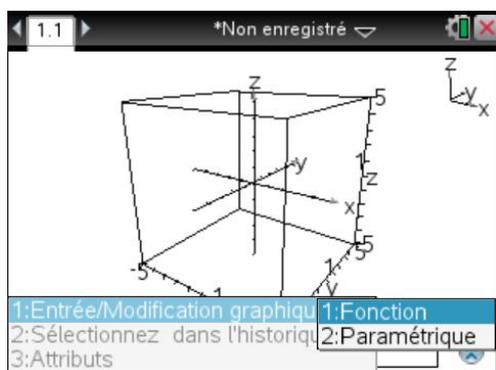
## 3. Représentation graphique 3D

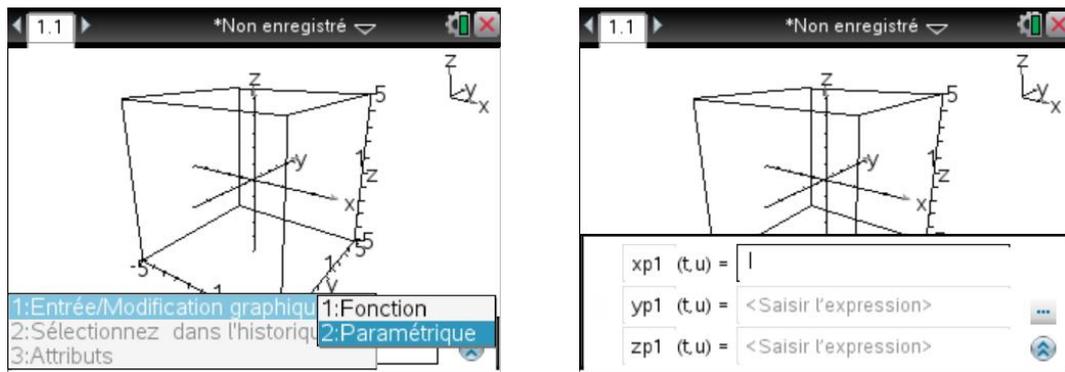
Il est possible dans les dernières versions de la TI-Nspire CAS de représenter des surfaces et des courbes paramétrées dans l'espace.

Pour cela il faut ouvrir l'application Graphiques menu, sélectionner **Affichage** puis **Représentation graphique en 3D**.

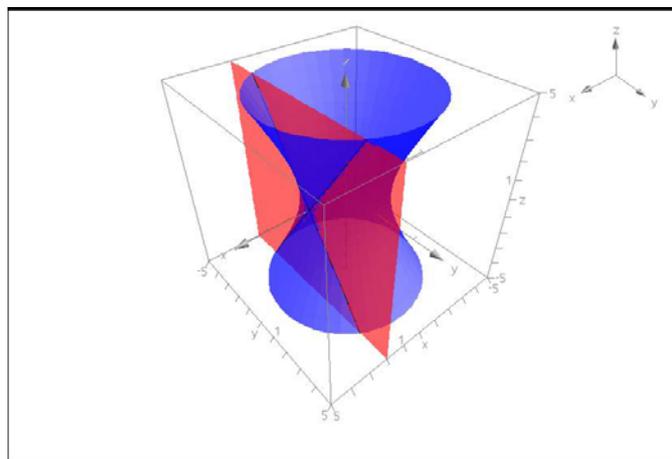


On dispose de deux types de tracé : fonction  $z = f(x, y)$ , ou paramétrique  $\begin{cases} x = f(u, t) \\ y = g(u, t) \\ z = h(u, t) \end{cases}$ .





Un exemple, intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et du plan passant par le point d'intersection d'abscisse positive de l'hyperboloïde avec l'axe  $Ox$ , de direction l'orthogonal de cet axe. La figure ci-dessous est réalisée avec le logiciel pour ordinateur pour une meilleure lecture.

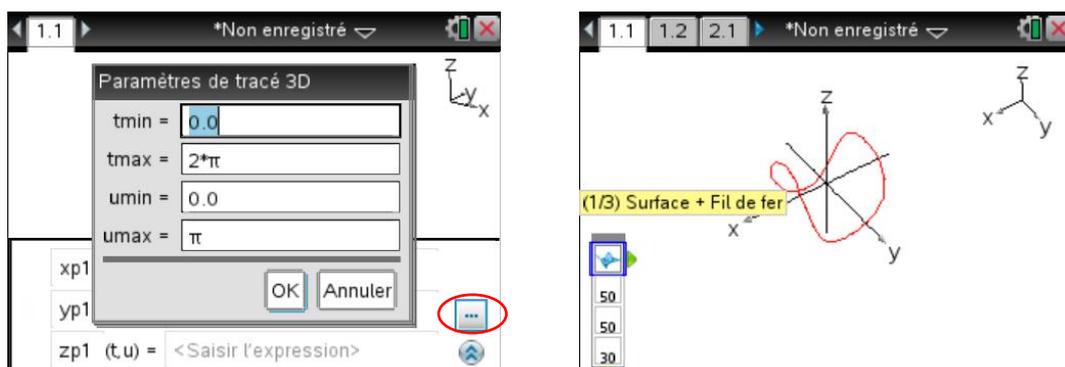


On utilise le paramétrage  $\begin{cases} x = a \cdot \cosh(u) \cdot \cos(t) \\ y = a \cdot \cosh(u) \cdot \sin(t) \\ z = b \cdot \sinh(u) \end{cases}$  pour l'hyperboloïde et  $\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = u \end{cases}$  pour le plan.

L'intersection donne deux droites sécantes paramétrées par  $\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = \pm \frac{b}{a} t \end{cases}$ . Ces droites engendrent

l'hyperboloïde par rotation autour de l'axe  $Oz$ .

Les réglages pour les tracé 3D peuvent être effectués à partir de la ligne de saisie : **ctrl** **G**



Cliquer sur le carré avec les trois points (écran de gauche). Pour obtenir l'écran de droite ctrl menu puis sélectionner **Attributs**. Voir l'aide du logiciel pour les différents réglages.

La courbe de l'écran de droite est obtenue en mode paramétrique et en prenant un seul paramètre.

Cette courbe admet comme paramétrage :

$$x(t) = f(t) \cos(t) ; y(t) = f(t) \sin(t) ; z(t) = (f(t))^2 \cos(2t), \text{ avec } f(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{5 + 4 \cos(4t)}}}.$$

## Exercices

### 1 Jacobien en coordonnées sphériques

Calculer le jacobien de la fonction  $(r, \theta, \phi) \mapsto (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi)$ .

### 2 Extrema d'une fonction (1)

On considère la fonction  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

Étudier ses extrema.

### 3 Extrema d'une fonction (2)

On considère la fonction  $f(x, y) = (4x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + 4y^2)}$ .

Déterminer les points critiques, puis les extrema de  $f$ .

### 4 Développement limité d'une fonction implicite

On considère l'équation  $\arctan(xy) + 1 = e^{x+y}$ . On demande de montrer qu'il existe deux intervalles ouverts  $U$  et  $V$  contenant 0 et une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  définie de  $U$  dans  $V$  tels que  $\forall (x, y) \in U \times V \quad \arctan(xy) + 1 = e^{x+y} \Leftrightarrow y = f(x)$ . On demande ensuite de déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction  $f$ .

### 5 Calcul d'une intégrale double après passage en polaire

Calculer  $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$  avec  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

### 6 Fenêtre de Viviani

Déterminer l'aire de la partie de la sphère de centre l'origine et de rayon  $R$ , intérieure au cylindre d'équation  $x^2 + y^2 - Rx = 0$ . On commencera par faire une représentation graphique.

## Solutions des exercices

### 1 Jacobien en coordonnées sphériques

$$f(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{d}{dr}(f(r, \theta, \varphi)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{d}{d\theta}(f(r, \theta, \varphi)) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \cdot r \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{d}{d\varphi}(f(r, \theta, \varphi)) = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cdot r \end{bmatrix}$$

☞ On prendra soin de créer une nouvelle activité ce qui permet entre autres d'effacer la définition de  $r$ , en tant que fonction, faite dans le paragraphe 1.3.

Il nous reste maintenant à regrouper les vecteurs  $u$ ,  $v$  et  $w$  pour former la matrice jacobienne, cela peut se faire avec la fonction **augment**.

Il suffit ensuite de calculer le déterminant de cette matrice pour obtenir le jacobien.

$$\text{augment}(\text{Liste1}, \text{Liste2})$$

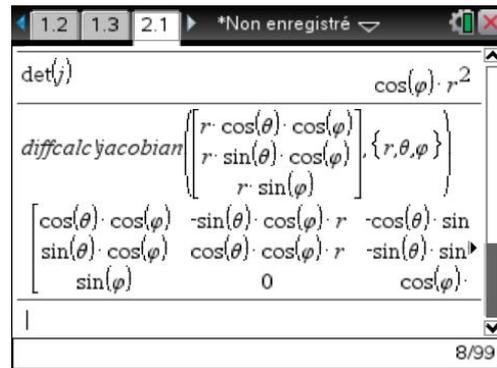
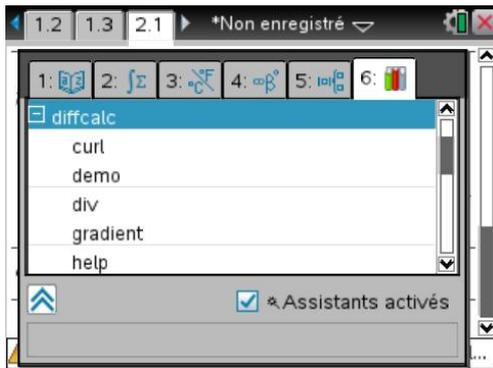
$$j := \text{augment}(\text{Ans}, w)$$

$$j := \text{augment} \left( \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot r \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot r \\ \sin(\varphi) & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cdot r \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(j) = \cos(\varphi) \cdot r^2$$

Vous trouverez une fonction permettant de calculer la matrice jacobienne, ainsi que d'autres fonctions utiles dans la bibliothèque **diffcalc**, téléchargeable sur [www.univers-ti-nspire.com](http://www.univers-ti-nspire.com).

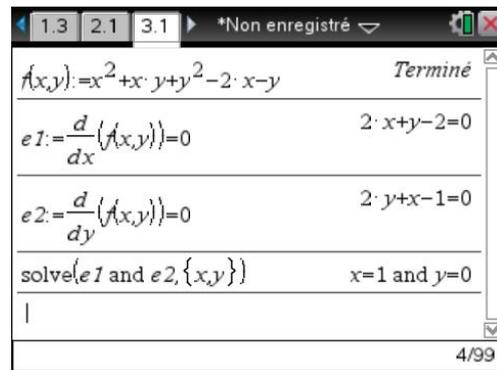
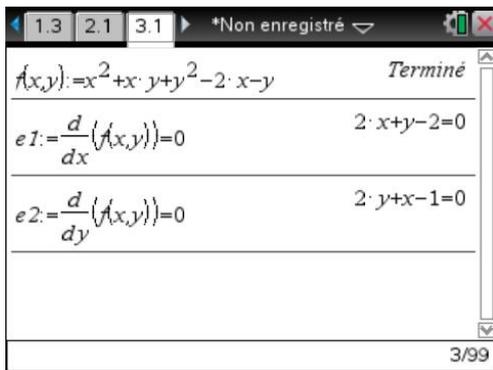
Voici comment utiliser cette fonction :



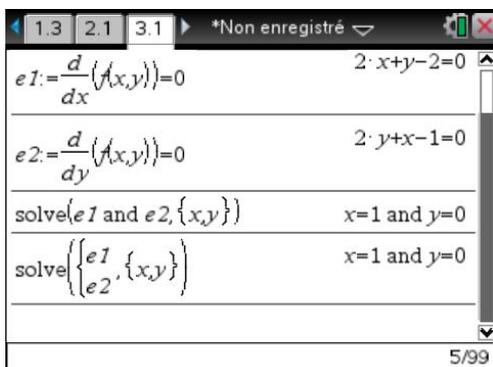
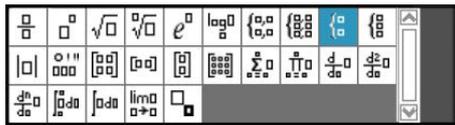
☞ Voir le **chapitre 15** pour plus d'information sur l'utilisation des bibliothèques.

## 2 Extrema d'une fonction (1)

Nous devons chercher si des points vérifient les deux conditions  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$ .



Pour résoudre le système d'équations, on peut utiliser la syntaxe ci-dessus ou le modèle  $\left\{ \begin{array}{l} e1 \\ e2 \end{array} \right\}$  :



Il reste à voir si ce point est effectivement un extremum :

*Non enregistré	
$e2 = \frac{d}{dy} \{f(x,y)\} = 0$	
$\text{solve}(e1 \text{ and } e2, \{x,y\})$	$x=1 \text{ and } y=0$
$\text{solve}(\{e1, e2, \{x,y\}\})$	$x=1 \text{ and } y=0$
$f(1,0)$	$-1$
$f(1+h,k) - f(1,0)$	$h^2 + h \cdot k + k^2$
7/99	

L'expression  $h^2 + hk + k^2$  est toujours strictement positive.

On peut écrire

$$h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

ou utiliser les résultats généraux sur la réduction des formes quadratiques si ceux-ci sont à votre programme.

☞ Si l'utilisation d'une formule de Taylor à l'ordre 2 fait partie de votre programme, vous pourrez très facilement écrire une fonction calculant les coefficients de Monge :

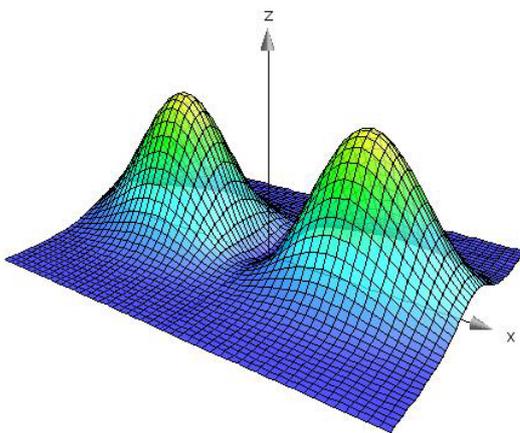
$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

puis étudiant le type d'extremum obtenu en fonction du signe de  $r$  et de  $s^2 - rt$  au point considéré.

On peut en déduire que la fonction admet un minimum en ce point.

### 3 Extrema d'une fonction (2)

Représentons tout d'abord la fonction :  $z_1(x, y) = (4x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + 4y^2)}$



Pour déterminer les points critiques de  $f$ , nous devons chercher les points vérifiant les deux conditions

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

TI-Nspire CAS interface showing the definition of the function  $f(x,y) = z1(x,y)$  and the solving process for the first-order partial derivatives. The function is defined as  $f(x,y) = (4 \cdot x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2}$ . The system of equations to solve is  $\begin{cases} \frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \end{cases}$  for  $\{x,y\}$ . The solution is  $x=-1$  and  $y=0$  or  $x=0$  and  $y=-\frac{1}{2}$  or  $x=0$  and  $y=0$ .

TI-Nspire CAS interface showing the definition of the function  $f(x,y) = (4 \cdot x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2}$  and the solving process for the first-order partial derivatives. The system of equations to solve is  $\begin{cases} \frac{d}{dx}(f(x,y))=0 \\ \frac{d}{dy}(f(x,y))=0 \end{cases}$  for  $\{x,y\}$ . The solution is  $x=0$  and  $y=0$  or  $x=0$  and  $y=\frac{1}{2}$  or  $x=1$  and  $y=0$ .

Il y a donc 5 points critiques :  $(0,0)$ ,  $(0,1/2)$ ,  $(0,-1/2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$ .

Pour des raisons de symétrie, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(-x,y) = f(x,-y) = f(x,y)$ , on peut se borner à étudier les points de  $\mathbb{R}_+^2$ .

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(0,0) = 0 \leq f(x,y)$ , donc  $f$  admet à l'origine un minimum global.

La matrice hessienne peut être obtenue dans la bibliothèque **diffcalc**, en  $(1,0)$  elle est définie négative, donc  $f$  admet en  $(1,0)$  un maximum qui est global, idem en  $(-1,0)$  par symétrie.

TI-Nspire CAS interface showing the calculation of the Hessian matrix. The function is defined as  $f(x,y) = (4 \cdot x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2}$ . The Hessian matrix is calculated as  $\text{diffcalc Hessien}(f(x,y), \{x,y\})$ . The matrix is  $\begin{bmatrix} 2 \cdot (8 \cdot x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot (y^2 - 10) - y^2 + 4) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2} & 4 \cdot x \cdot (16 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 17) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2} \cdot y \\ 4 \cdot x \cdot (16 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 17) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2} \cdot y & (y^2 - 17) \cdot e^{-x^2 - 4 \cdot y^2} \cdot y \end{bmatrix}$ .

TI-Nspire CAS interface showing the evaluation of the Hessian matrix at  $(1,0)$ . The matrix is  $\begin{bmatrix} 0 & -4 \cdot e^{-1} \\ -16 \cdot e^{-1} & 0 \\ 0 & -30 \cdot e^{-1} \end{bmatrix}$ .

En  $(0,1/2)$  il y a changement de signe, ce n'est pas un extremum, c'est un col comme on peut le voir sur la représentation graphique, même comportement par symétrie en  $(0,-1/2)$ .

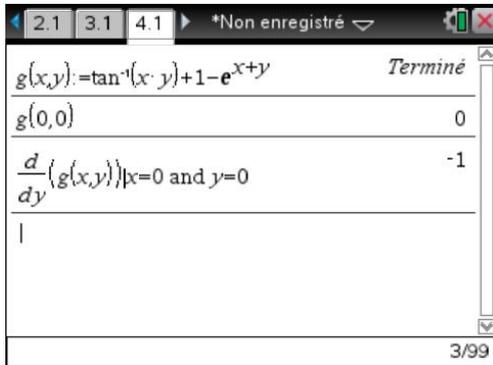
TI-Nspire CAS interface showing the evaluation of the Hessian matrix at  $(0,1/2)$ . The matrix is  $\begin{bmatrix} \frac{15 \cdot e^{-1}}{2} & 0 \\ 0 & -4 \cdot e^{-1} \end{bmatrix}$ .

Conclusion :  $f$  atteint en  $(0,0)$  un minimum global égal à 0, et un maximum global égal à  $\frac{4}{e}$  en  $(1,0)$  et  $(-1,0)$ .

## 4 Développement limité d'une fonction implicite

Pour commencer, on définit  $g(x, y) = \arctan(xy) + 1 - e^{x+y}$ .

Cette fonction est bien de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ , avec  $g(0,0) = 0$ . De plus,  $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \neq 0$ .



$g(x,y) := \tan^{-1}(x \cdot y) + 1 - e^{x+y}$	Terminé
$g(0,0)$	0
$\frac{d}{dy}(g(x,y)) _{x=0 \text{ and } y=0}$	-1
	3/99

Le cours nous permet alors de justifier l'existence de  $U$ ,  $V$  et  $f$ . De plus  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 et admet donc des développements limités à tout ordre. Pour déterminer ce développement limité, une des méthodes possibles consiste à procéder par identification.

A priori, on a un développement du type

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2).$$

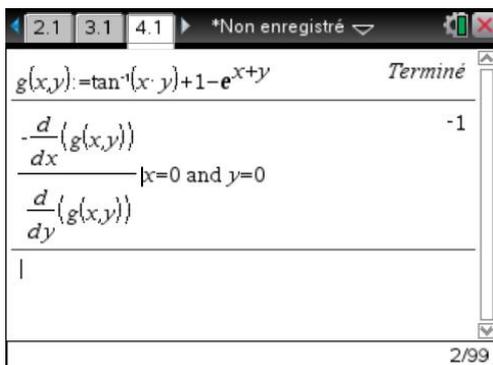
On sait déjà quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  :

$$a = f(0) = 0$$

$$b = f'(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)}$$

Cette dernière valeur s'obtient facilement avec la TI-Nspire CAS :

$$-d(g(x,y),x) / d(g(x,y),y)|_{x=0 \text{ and } y=0}$$



$g(x,y) := \tan^{-1}(x \cdot y) + 1 - e^{x+y}$	Terminé
$-\frac{d}{dx}(g(x,y))$	-1
$\frac{d}{dy}(g(x,y)) _{x=0 \text{ and } y=0}$	
	2/99

On a donc  $f(x) = -x + cx^2 + o(x^2)$ .

Il suffit en fait de faire un DL2 de  $h(x) = g(x, f(x))$ , et d'identifier ce DL2 au DL2 de la fonction nulle pour déterminer la valeur de  $c$ .

Cela peut être fait directement sur la TI-Nspire CAS : on remplace  $f(x)$  par son DL2, et on demande un DL2 du résultat. Le résultat obtenu dans l'écran de gauche montre que  $-c-1$  doit être nul et donc que  $c = -1$  :

TI-Nspire CAS screen showing the derivative of  $g(x,y) = \tan^{-1}(x \cdot y) + 1 - e^{x+y}$ . The screen displays the partial derivative with respect to  $x$  as  $-1$  and the Taylor expansion of  $g(x, x+c \cdot x^2)$  around  $x=2$  as  $(-c-1) \cdot x^2$ .

TI-Nspire CAS screen showing the Taylor expansion of  $g(x, a+b \cdot x+c \cdot x^2)$  around  $x=2$ . The result is  $-e^a + 1 + (e^a \cdot (-b-1) + a) \cdot x + e^a \cdot \left( \frac{-b^2}{2} - b - c - \frac{1}{2} \right)$ .

En fait, il serait même possible de parvenir au résultat sans utiliser les valeurs de  $a$  et  $b$ , comme le montre l'écran de droite.

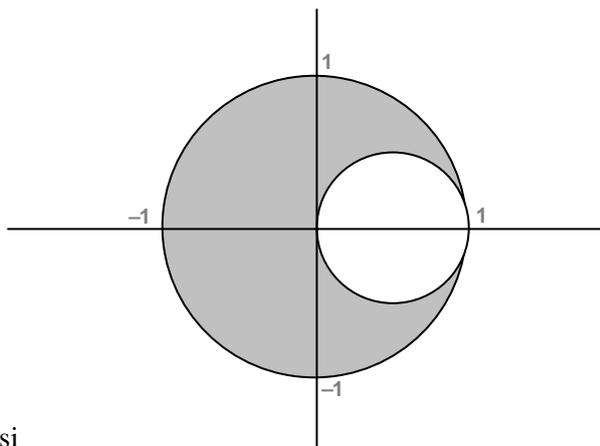
Attention cependant, la méthode utilisée mériterait quelques justifications. Vous savez bien par exemple que le DL2 d'une partie d'une expression ne permet pas toujours d'obtenir le DL2 de l'ensemble de celle-ci.

Le rôle de la calculatrice est seulement de vous permettre de vérifier votre calcul.

## 5 Calcul d'une intégrale double après passage en polaire

Le domaine  $D$  est délimité par les deux cercles d'équations  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  et  $x^2 + y^2 - x = 0$ , ou encore  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .

Pour calculer cette intégrale, on peut passer en coordonnées polaires. Les cercles ont pour équation  $\rho = 1$  et  $\rho = \cos(\theta)$ . Pour  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , on doit avoir  $\cos(\theta) \leq \rho \leq 1$ , pour  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ .



On obtient ainsi

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\cos\theta}^1 \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left( \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) d\theta$$

Ou encore, en utilisant la symétrie par rapport à Ox,

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\cos\theta}^1 \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) d\theta + 2 \left( \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Il reste à faire les calculs d'intégrales nécessaires :

3.1 4.1 5.1 \*Non enregistré

$f(r) := \frac{r}{(1+r^2)^2}$  Terminé

$\int_{\cos(\theta)}^1 f(r) dr = \frac{-\cos(2 \cdot \theta) - 1}{4 \cdot (\cos(2 \cdot \theta) + 3)}$

2/99

3.1 4.1 5.1 \*Non enregistré

$\int_{\cos(\theta)}^1 f(r) dr = \frac{-\cos(2 \cdot \theta) - 1}{4 \cdot (\cos(2 \cdot \theta) + 3)}$

$a := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(2 \cdot \theta) - 1}{4 \cdot (\cos(2 \cdot \theta) + 3)} d\theta = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot \pi}{8}$

3/99

3.1 4.1 5.1 \*Non enregistré

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(2 \cdot \theta) - 1}{4 \cdot (\cos(2 \cdot \theta) + 3)} d\theta = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot \pi}{8}$

$b := \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{(1+r^2)^2} dr = \frac{\pi}{8}$

$2 \cdot (a+b) = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4}$

5/99

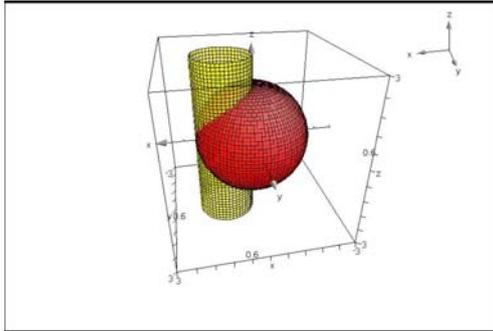
En conclusion  $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ .

## 6 Fenêtre de Viviani

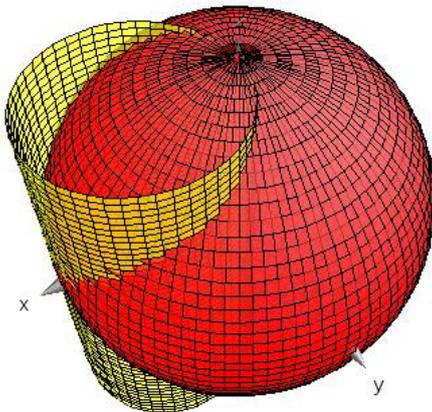
Représentation graphique en mode 3D, on choisit l'option paramétrique :

On paramètre la sphère en prenant par exemple  $R = 2$  par 
$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) \\ y = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(u) \\ z = 2 \cdot \sin(u) \end{cases}, (t, u) \in [0, 2\pi]^2 ;$$

le cylindre par 
$$\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = u \end{cases}, (t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} .$$

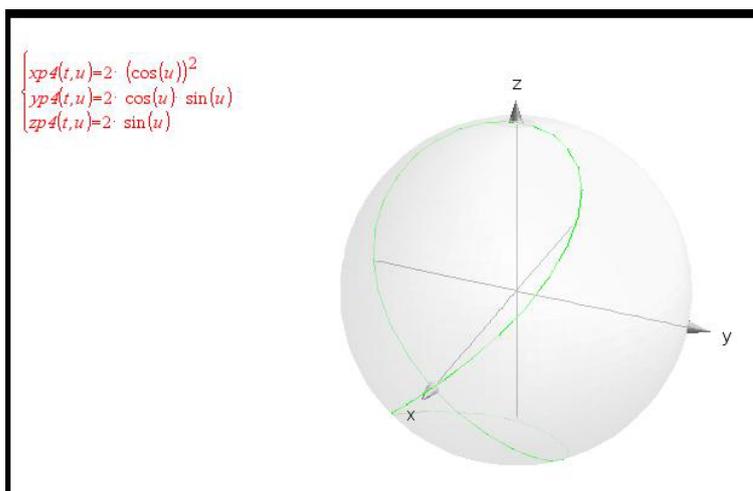


On peut zoomer et changer l'angle de vue.



La fenêtre de Viviani est délimitée par la courbe intersection des deux surfaces qui peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos^2(u) \\ y = 2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u), \quad u \in [0, 2\pi] \text{ (voir ci-dessous).} \\ z = 2 \cdot \sin(u) \end{cases}$$



Pour calculer l'aire demandée, par des raisons de symétrie évidentes, on peut se borner à calculer l'aire de la partie située dans le 1<sup>er</sup> secteur,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ . La partie de sphère est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) \\ y = R \cdot \sin(t) \cdot \cos(u), (t, u) \in [0, \pi/2]^2, \text{ pour être à l'intérieur du cylindre on doit avoir } x^2 + y^2 \leq R x, \\ z = R \cdot \sin(u) \end{cases}$$

soit  $R^2 \cos^2 u \leq R^2 \cos u \cdot \cos t$  et donc vu que  $\cos u \geq 0$ ,  $\cos u \leq \cos t$ , soit  $u \in [t, \pi/2]$ .

L'aire  $\mathcal{A}$  demandée est donc égale à :

$$\mathcal{A} = 4 \int_0^{\pi/2} \left( \int_t^{\pi/2} R^2 \cos u \, du \right) dt = 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t) \, dt = 2R^2 (\pi - 2).$$

En effet l'aire d'une portion de la sphère définie par le paramétrage :

$$\varphi : (t, u) \mapsto (R \cdot \cos(t) \cdot \cos(u), R \cdot \sin(t) \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u)), (t, u) \in \Delta$$

est égale à  $\iint_{\Delta} R^2 |\cos u| \, dt \, du$ , comme on peut le vérifier à l'aide de la TI-Nspire CAS.

TI-Nspire CAS screenshot showing the definition of the parameterization  $\varphi(t, u)$  and the calculation of its Jacobian determinant. The screen displays:

$$\varphi(t, u) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) \\ r \cdot \sin(t) \cdot \cos(u) \\ r \cdot \sin(u) \end{bmatrix}$$

Terminé

$$\text{diffcalc} \text{jacobian}(\varphi(t, u), \{t, u\})$$

$$\begin{bmatrix} -r \cdot \sin(t) \cdot \cos(u) & -r \cdot \cos(t) \cdot \sin(u) \\ r \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) & -r \cdot \sin(t) \cdot \sin(u) \\ 0 & r \cdot \cos(u) \end{bmatrix}$$

crossP(Ans[1], Ans[2])

2/99

TI-Nspire CAS screenshot showing the calculation of the cross product of the partial derivatives and its norm. The screen displays:

$$\text{crossP} \left( \begin{bmatrix} -r \cdot \sin(t) \cdot \cos(u) & -r \cdot \cos(t) \cdot \sin(u) \\ r \cdot \cos(t) \cdot \cos(u) & -r \cdot \sin(t) \cdot \sin(u) \\ 0 & r \cdot \cos(u) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} r^2 \cdot \cos(t) \cdot (\cos(u))^2 & r^2 \cdot \sin(t) \cdot (\cos(u))^2 & r^2 \cdot \cos(u) \end{bmatrix}$$

norm(Ans[1])

$$\sqrt{r^2 \cdot \cos(t) \cdot (\cos(u))^2 + r^2 \cdot \sin(t) \cdot (\cos(u))^2 + r^2 \cdot (\cos(u))^2}$$

4/99

Vérifions le calcul de l'intégrale double :

TI-Nspire CAS screenshot showing the evaluation of the double integral. The screen displays:

$$4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_t^{\pi/2} (r^2 \cdot \cos(u)) \, du \, dt$$

2 · (π - 2) · r<sup>2</sup>

5/99

