

Suites et séries

Nous allons ici étudier la résolution symbolique de quelques exercices à l'aide de la TI-Nspire CAS. Vous trouverez également des informations précieuses pour le cas où vous auriez à faire des calculs utilisant des séries géométriques de raison négative. La dernière partie de ce chapitre traite les suites et séries de fonctions.

Sommaire

1. Suite.....	2
1.1 Étude directe (graphique et numérique).....	2
1.2 Utilisation du tableur ou d'un programme	3
1.3 Étude symbolique des limites éventuelles des suites extraites	4
1.4 Étude symbolique des suites extraites	6
2. Calcul symbolique des termes d'une suite récurrente	8
2.1 Calcul par récurrence	8
2.2 Calcul itératif des termes	9
3. Séries.....	10
3.1 Calculs directs de sommes finies ou infinies	10
3.2 Séries géométriques de raison négative	12
4. Suites et séries de fonctions	12
4.1 Un exemple de convergence uniforme	12
4.2 Un exemple de convergence non uniforme	14
4.3 Illustration graphique	15

1. Suites

Pour illustrer les possibilités de la TI-Nspire CAS dans ce domaine, nous allons étudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{4 - u_n^2}{\sqrt{5}}$, avec $u_0 \in [0, 2]$.

1.1 Étude directe (graphique et numérique)

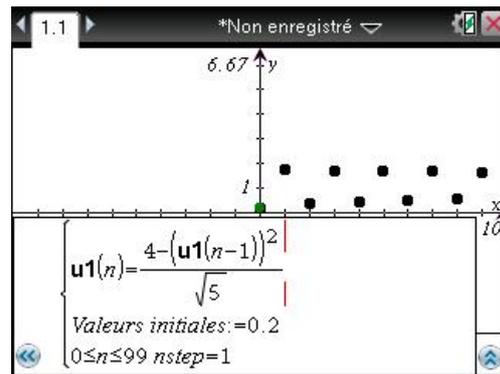
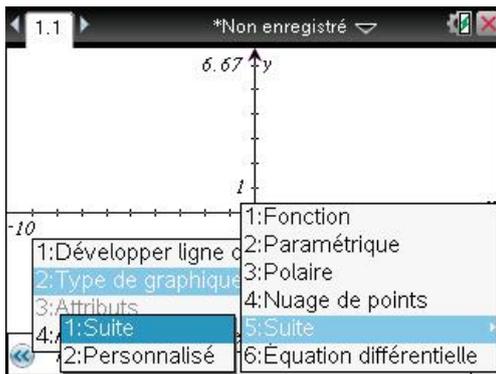
Cette possibilité était absente sur les premières versions de TI-Nspire CAS et il était nécessaire d'utiliser un classeur spécifique. Ce n'est plus le cas sur les versions récentes.

Sur la version 3.01 et les versions suivantes, il est possible d'étudier directement une ou plusieurs suites (représentation graphique et table de valeurs). Voir manuel d'utilisation :

<http://education.ti.com/calculators/downloads/FRANCE/Guidebooks/Detail?id=6774>

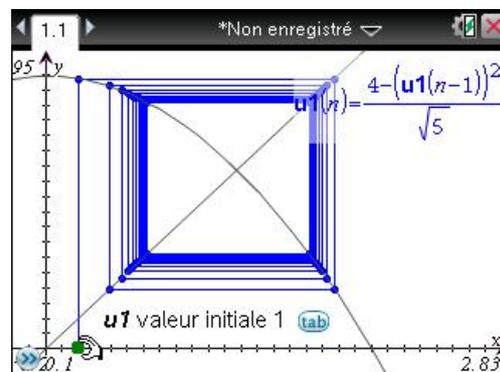
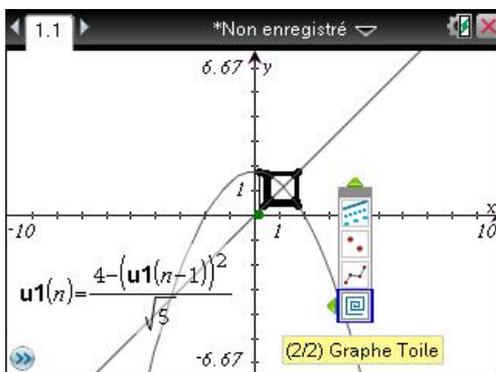
Il est possible de définir la suite, puis de choisir entre deux types de représentations (**Temps** ou **Toile**). On peut faire varier directement le point définissant la condition initiale, et obtenir un tableau donnant les valeurs de la suite.

On ouvre un classeur avec l'application Graphiques, **ctrl** **G** dans la ligne de saisie afin de choisir le type de représentation graphique, on choisit **Suite**. On saisit la définition de la suite ainsi que la condition initiale. Un premier tracé apparaît, n est porté en abscisse, u_n est ordonnées, c'est le mode **Temps**.



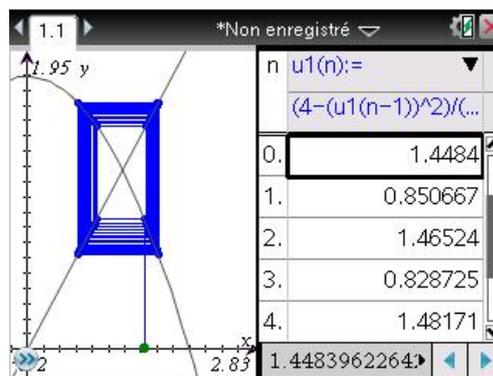
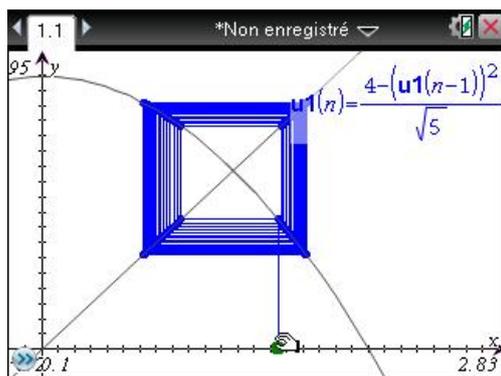
Pour passer en mode **Toile**, on sélectionne un des points de la suite, **ctrl** **menu** sélectionner **Attributs**.

On peut changer la couleur du trait ainsi que les paramètres de la fenêtre d'affichage.



Il est possible de changer de condition initiale, directement sur le graphique, en saisissant le point vert qui représente u_0 , et en le déplaçant.

ctrl **T** permet de faire afficher dans un partage d'écran un tableau donnant les valeurs des termes de la suite.



1.2 Utilisation du tableur ou d'un programme

On peut aussi construire directement une table de valeurs à l'aide de l'application Tableur & listes. On commence par définir la fonction utilisée pour la définition de la suite récurrente dans l'application Calculs. On peut utiliser une instruction **define** (à gauche), ou la syntaxe abrégée (à droite) :

Define $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$ Terminé

$f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$ Terminé

Il suffirait de modifier cette définition pour travailler avec une autre suite récurrente.

On ouvre ensuite l'application Tableur & listes et, dans la première colonne du tableau, on définit la suite des entiers naturels de 0 à 30 : **=seq(i,i,0,30)**. Dans la première case de la seconde colonne, on entre u_0 , dans la deuxième **=f(b1)** et on copie vers le bas grâce à la fonction de saisie rapide (**menu** **3** **3**).

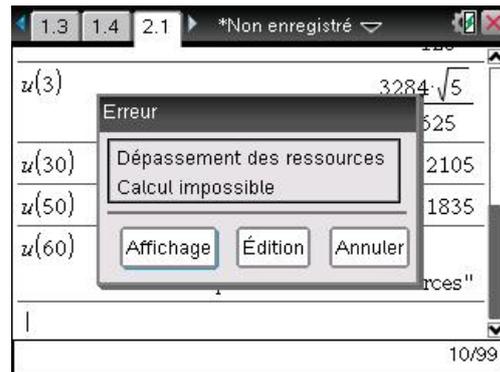
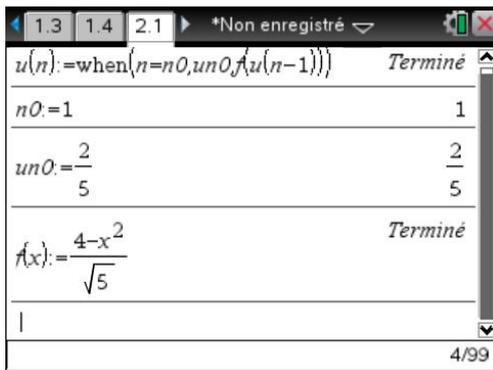
A	B	C	D
=seq(i,i,0,30)			
1	0	0.2 ← u0	
2	1	1.77097	
3	2	0.386249	
4	3	1.72214	
5	4		
6	5		

A	B	C	D
=seq(i,i,0,30)			
28		0.610339	
30	29	1.62193	
31	30	0.612384	
32			
33			
34			

On peut aussi obtenir les valeurs de termes de la suite dans l'application Calculs :

Version récursive :

On peut utiliser la fonction **when** pour définir la suite de façon récursive, l'écriture est très simple, mais l'efficacité limitée par le nombre d'appels récursifs. On verra en plus un autre problème au paragraphe 2, lors du calcul exact des termes d'une suite définie par récurrence.



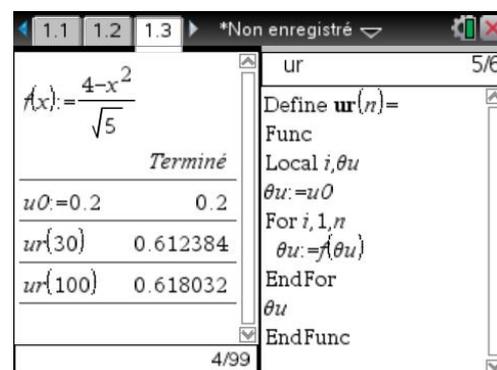
Version itérative :

La version itérative nécessite l'écriture d'une fonction, mais est plus rapide et permet de calculer des termes d'indice plus grands.

```

Define ur(n)=Func
Local θu,i
θu:=u0
For i,1,n
θu:=f(θu)
EndFor
θu
EndFunc

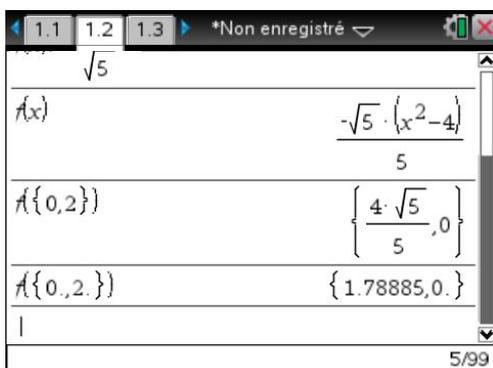
```



1.3 Étude symbolique des limites éventuelles des suites extraites

Cette suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, décroissante sur \mathbb{R}_+ . En particulier, f est décroissante sur $[0,2]$ et $f([0,2]) = [f(2), f(0)] = \left[0, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right] \subset [0,2]$.

On peut naturellement confier à la TI-Nspire CAS le soin de faire ces derniers calculs (on remarquera qu'il est possible d'obtenir directement l'image d'une liste de valeurs et des valeurs approchées en faisant suivre d'un point les entiers).



On peut en déduire que tous les termes de la suite sont dans $[0,2]$. La continuité de f entraîne que si la suite (u_n) converge, cela ne peut être que vers un point fixe de f contenu dans cet intervalle.

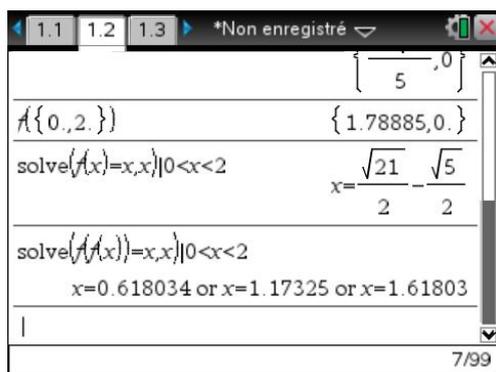
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont toutes les deux monotones, puisque définies à partir de $g = f \circ f$, fonction croissante et continue sur $[0, 2]$:

$$v_n = u_{2n}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n))$$

$$w_n = u_{2n+1}, w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n))$$

Ces suites sont bornées (on reste dans $[0, 2]$), et monotones. Elles vont donc être convergentes. La continuité de $f \circ f$ montre que la limite ne peut être que l'un des points fixes de cette fonction.

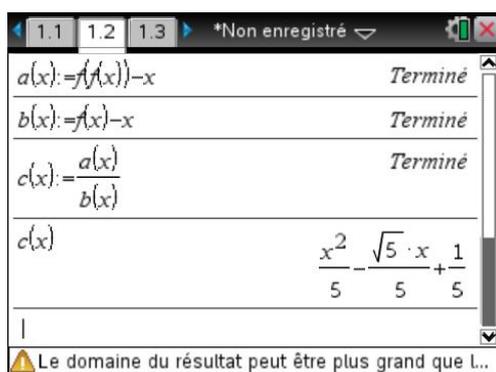
Il reste à étudier les solutions des équations $f(x) = x$ et $f(f(x)) = x$ dans l'intervalle $[0, 2]$ pour déterminer les limites éventuelles de (u_n) , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .



La TI-Nspire CAS a échoué dans la résolution symbolique de l'équation $f(f(x)) = x$...

Nous allons devoir lui donner un petit coup de main. Il s'agit en fait d'une équation polynomiale de degré 4, ce qui explique l'échec de la résolution, mais nous sommes ici dans un cas très favorable, puisque nous savons que les solutions de l'équation $f(x) = x$ (équation de degré 2) sont également solutions de l'équation $f(f(x)) = x$.

Cela montre que le polynôme $A(x) = f(f(x)) - x$ est divisible par $B(x) = f(x) - x$. Il suffit donc de calculer $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, puis de résoudre l'équation $C(x) = 0$ pour obtenir les solutions de $A(x) = 0$ (réunion des solutions de $B(x) = 0$ et de $C(x) = 0$).



☞ On valide les calculs avec **ctrl** **enter** pour obtenir les valeurs approchées des solutions.

En conclusion,

- les points fixes de $f \circ f$ dans l'intervalle $[0, 2]$ sont : $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $r_2 = \frac{\sqrt{21}-\sqrt{5}}{2}$ et $r_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
(La valeur $r_0 = -\frac{\sqrt{21}+\sqrt{5}}{2}$ n'est pas dans l'intervalle.)

- Les limites éventuelles des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont égales à r_1 , r_2 ou r_3 .
- La valeur r_2 , seul point fixe de f dans l'intervalle $[0, 2]$ est la seule limite possible de la suite (u_n) .

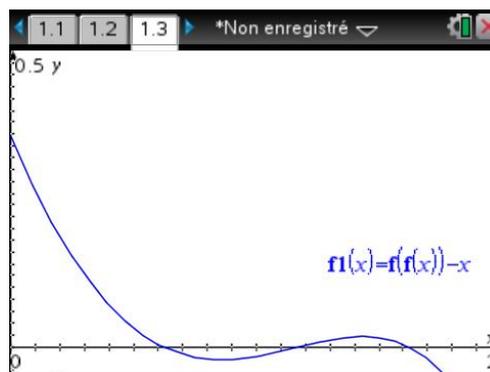
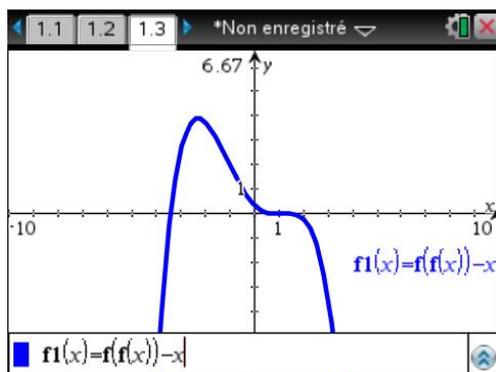
On peut également vérifier que $f(r_1) = r_3$ et $f(r_3) = r_1$.

1.4 Étude symbolique des suites extraites

L'étude complète des suites extraites repose sur le fait que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f décroissante vérifiant $f(x) = x$ en r_1, r_2 et r_3 .

- Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont toutes les deux monotones, puisque définies à partir de $g = f \circ f$, fonction croissante comme composée de deux fonctions décroissantes.
- La décroissance de f entraîne que si $u_{2n-1} \leq u_{2n+1}$ alors $f(u_{2n-1}) \geq f(u_{2n+1})$, c'est à dire $u_{2n} \geq u_{2n+2}$. On montre facilement ainsi que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont donc des sens de variation opposés.
- Si $u_{2n+1} \rightarrow \ell$, alors, en utilisant la continuité de f , $f(u_{2n+1}) \rightarrow f(\ell)$. Donc (u_{2n}) converge vers $f(\ell)$. On peut montrer de la même manière que si (u_{2n}) converge vers ℓ' , alors (u_{2n+1}) converge vers $f(\ell')$.
- Si le premier terme u_1 est dans un intervalle du type $[a, b]$ avec $f(f(a)) = a$ et $f(f(b)) = b$, la croissance de $f \circ f$, et donc de $(f \circ f)^n$ permet d'obtenir : $(f \circ f)^n(a) \leq (f \circ f)^n(u_1) \leq (f \circ f)^n(b)$, c'est-à-dire $a \leq u_{2n+1} \leq b$. On reste dans $[a, b]$.
- Si de plus $f(f(x)) - x$ est positif sur cet intervalle $[a, b]$, la suite (u_{2n+1}) est croissante sur cet intervalle car $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(f(u_{2n+1})) - u_{2n+1} \geq 0$. Elle est décroissante si $f(f(x)) - x$ est négatif sur $[a, b]$,

Il est facile d'étudier graphiquement le signe de $f(f(x)) - x$ sur $[0, 2]$:



On peut justifier ce résultat en remarquant que le polynôme du quatrième degré $f(f(x)) - x$ se factorise sous la forme $f(f(x)) - x = -\frac{\sqrt{5}}{25}(x - r_0)(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$.

Il est donc négatif sur $]-\infty, r_0[$, $]r_1, r_2[$ et $]r_3, +\infty[$, positif sur $]r_0, r_1[$ et $]r_2, r_3[$.

Si l'on se limite à l'intervalle $[0, 2]$, on a un signe positif sur $I_1 =]0, r_1[$ et $I_3 =]r_2, r_3[$, négatif sur $I_2 =]r_1, r_2[$ et $I_4 =]r_3, 2[$.

En utilisant les idées précédentes, il est alors facile de préciser le sens de variation des suites extraites, et de montrer que la suite ne converge pas, sauf dans le cas particulier où $u_1 = r_1$.

- Si $u_1 \in]0, r_1[$, tous les termes de la suite (u_{2n+1}) sont dans $[0, r_1]$. Cette suite est donc croissante ($f \circ f(x) - x \geq 0$), majorée par r_1 . La suite converge, et sa limite comprise entre 0 et r_1 , et ne peut être égale qu'à r_1 , r_2 ou r_3 . Cette limite est donc égale à r_1 . Dans ce cas, la suite (u_{2n}) est décroissante, et converge vers $r_3 = f(r_1)$.
- Si $u_1 = r_1$, on a $u_2 = f(r_1) = r_3$, puis $u_3 = f(r_3) = r_1$, etc.
- Si $u_1 \in]r_1, r_2[$, tous les termes de la suite (u_{2n+1}) sont dans $[r_1, r_2]$. Cette suite est donc décroissante ($f \circ f(x) - x \leq 0$), minorée par r_1 , et la limite est comprise entre r_1 et $u_1 < r_2$, et ne peut être égale qu'à r_1 , r_2 ou r_3 . Cette limite est donc égale à r_1 . Dans ce cas, la suite (u_{2n}) est croissante, et converge vers $r_3 = f(r_1)$.
- Si $u_1 = r_2$, on a $u_2 = f(r_2) = r_2$, etc. La suite (u_n) est stationnaire.
- Si $u_1 \in]r_2, r_3[$, tous les termes de la suite (u_{2n+1}) sont dans $[r_2, r_3]$. Cette suite est donc croissante ($f \circ f(x) - x \geq 0$), majorée par r_3 , et la limite est comprise entre $u_1 > r_2$ et r_3 , et ne peut être égale qu'à r_1 , r_2 ou r_3 . Cette limite est donc égale à r_3 . Dans ce cas, la suite (u_{2n}) est décroissante, et converge vers $r_1 = f(r_3)$.
- Si $u_1 = r_3$, on a $u_2 = f(r_3) = r_1$, puis $u_3 = f(r_1) = r_3$, etc.
- Si $u_1 \in]r_3, 2[$, tous les termes de la suite (u_{2n+1}) sont dans $[r_3, 2]$. Cette suite est donc décroissante ($f \circ f(x) - x \leq 0$), minorée par r_3 , et la limite ne peut être égale qu'à r_1 , r_2 ou r_3 . Cette limite est donc égale à r_3 . Dans ce cas, la suite u_{2n} est croissante, et converge vers $r_1 = f(r_3)$.

2. Calcul symbolique des termes d'une suite récurrente

Dans l'exemple précédent, nous n'avons pas calculé les valeurs exactes des termes de la suite. Cela peut cependant être utile dans certains cas.

2.1 Calcul par récurrence

L'utilisation de la fonction **when** permet un calcul par récurrence. Pour définir une suite de premier terme u_{n_0} , et vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser l'instruction :

u(n):=when(n=n0,un0,f(u(n-1)))

Il suffit d'indiquer la définition de **f** et la valeur de **n0** et **un0** pour que la machine puisse faire les calculs nécessaires.

Voici le calcul de termes de la suite étudiée dans le paragraphe précédent.

The screenshots illustrate the following steps:

- Step 1:** Defining the function $u(n) := \text{when}(n=n_0, u_{n_0}, f(u(n-1)))$ with $n_0=1$, $u_{n_0}=\frac{2}{5}$, and $f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$.
- Step 2:** Calculating $u(1) = \frac{2}{5}$ and $u(2) = \frac{96 \cdot \sqrt{5}}{125}$.
- Step 3:** Calculating $u(3) = \frac{3284 \cdot \sqrt{5}}{15625}$, $u(30) = 1.62105$, and $u(50) = 1.61835$.
- Step 4:** Attempting to calculate $u(60)$ results in an error: "Dépassement des ressources Calcul impossible" (Resource limit exceeded, calculation impossible).

Le calcul d'un terme par cette méthode peut donc parfois être relativement compliqué, et même tout simplement impossible comme on peut le voir dans l'écran ci-dessus lors de la tentative de calcul de u_{60} . Le précédent calcul de u_{30} passe directement en valeur approchée.

Il est important de comprendre que si un calcul de type récursif est très simple à programmer, il peut cependant entraîner de gros calculs, d'autant que les résultats intermédiaires seront recalculés plusieurs fois si l'expression est mal formulée...

Prenons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Si l'on utilise l'instruction

u(n):=when(n=0,1,(u(n-1)+1)/(u(n-1)+2))

le calcul du terme u_n va entraîner deux fois le calcul du terme u_{n-1} . Ainsi le simple calcul de u_{11} entraînera 2 calculs de u_{10} , 4 calculs de u_9 , 8 calculs de u_8 , $2^{10} = 1024$ calculs de u_1 ... si la machine n'abandonne pas avant !

Il suffit d'entrer la définition de la suite en deux temps, sous la forme :

```
f(x):=(x+1)/(x+2)
```

```
u(n):=when(n=0,1,f(u(n-1)))
```

pour faire disparaître ce problème : lors du calcul de u_n , on ne calcule plus qu'une seule fois u_{n-1} , puis la valeur obtenue est utilisée par la fonction f pour déterminer u_n .

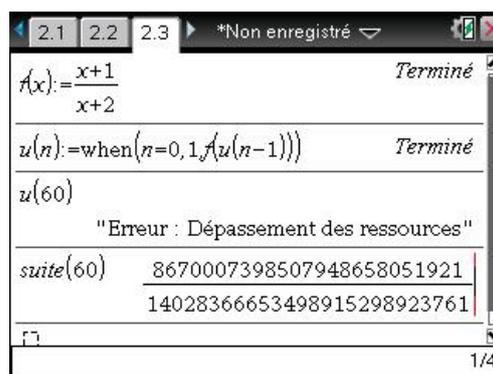
Une autre solution aurait été de remarquer que $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n + 2}$, et donc d'écrire

```
u(n):=when(n=0,1,1-1/(u(n-1)+2))
```

2.2 Calcul itératif des termes

Un calcul utilisant un calcul de proche en proche à l'aide d'une boucle est en fait nettement plus efficace en terme de temps de calcul. Voici une fonction permettant de faire cela.

```
Define suite(n)= Func
Local i,u
If n=0 Then
1
Else
u:=1
For i,1,n
u:=(u+1)/(u+2)
EndFor
EndIf
EndFunc
```



Ci-dessus, à droite, on trouve la définition d'une fonction itérative permettant de calculer les termes de la suite à l'aide d'une boucle. Dans l'écran de droite, on a commencé par utiliser la méthode décrite dans le paragraphe précédent, mais il n'a pas été possible d'obtenir le calcul d'un terme d'indice un peu élevé. En revanche, ce calcul a été obtenu sans problème en utilisant la fonction itérative.

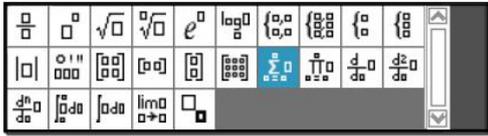
Voici quelques éléments pour comprendre les opérations effectuées par la fonction **suite**.

On commence par tester si l'indice est égal à celui du premier terme, et dans ce cas, on retourne la valeur de ce premier terme. Dans le cas contraire, on stocke la valeur du premier terme dans une variable u puis on répète l'opération $u := (u + 1)/(u + 2)$ autant de fois que nécessaire pour arriver au terme d'indice n . Le test sur la valeur de l'indice, et le choix des actions à entreprendre est fait par la structure **if ... then ... EndIf**. La répétition de l'opération de calcul des termes, et le décompte du nombre de répétitions nécessaires sont automatiquement gérés par l'instruction **For ... EndFor**. Si vous êtes débutant dans ce domaine, vous trouverez plus d'informations dans le [chapitre 14](#).

3. Séries

3.1 Calculs directs de sommes finies ou infinies

On entre le symbole somme soit à l'aide des modèles, soit à partir du menu **Analyse**. Dans de nombreux cas il est possible d'obtenir l'expression symbolique d'une somme de termes.



C'est en particulier le cas pour toutes les sommes finies classiques :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^n p^k = \frac{p^{n+1} - 1}{p-1}$$

Il est donc inutile de perdre du temps à recopier ce type de formule dans un fichier texte de votre calculatrice... Celle-ci permet aussi le calcul de nombreuses sommes infinies.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) = e - 1$$

On peut aussi utiliser la fonction **gospersum** que vous trouverez dans la bibliothèque de programmes **poly** disponible sur le site www.univers-ti-nspire.com. Elle permet d'obtenir des résultats dans certains cas où la fonction **sum** échoue.

$$\text{poly}\backslash\text{gospersum}\left(\frac{k-1}{k \cdot (k+2) \cdot (k-2)}, k, 3, n\right)$$

$$\frac{13}{32} - \frac{4 \cdot n^3 + 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 1}{4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$\text{poly}\backslash\text{gospersum}\left(\frac{k-1}{k \cdot (k+2) \cdot (k-2)}, k, 3, \infty\right) = \frac{13}{32}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k \cdot (k+2) \cdot (k-2)} \right) = \frac{13}{32}$$

En ce qui concerne les séries géométriques, il vaut mieux connaître les possibilités exactes de la calculatrice. Le calcul ne pose aucun problème lorsque la raison est comprise entre 0 et 1.

Cela reste vrai dans le cas d'une raison dont on ne précise pas la valeur, mais il faut dans ce cas indiquer la condition sur cette raison :

A screenshot of a TI-84 Plus calculator window titled '*Non enregistré'. The display shows the sum of a geometric series: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$. The result is $\frac{15}{2}$. Below this, there are two empty sum templates: $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$ and $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$. The page number 12/99 is visible at the bottom right.

A screenshot of a TI-84 Plus calculator window titled '*Non enregistré'. The display shows the general formula for the sum of a geometric series: $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n) = \frac{a}{p-1}$ for $0 < p < 1$. The page number 13/99 is visible at the bottom right.

C'est la méthode à utiliser pour retrouver les formules au programme de classes préparatoires sur les sommes des $n x^n$ et $n^2 x^n$:

A screenshot of a TI-84 Plus calculator window titled '*Non enregistré'. The display shows the sum of a series: $\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x^n) | 0 < x < 1$ with the result $\frac{x}{(x-1)^2}$. Below this, there is another sum: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \cdot x^n) | 0 < x < 1$ with the result $\frac{-x \cdot (x+1)}{(x-1)^3}$. The page number 15/99 is visible at the bottom right.

En revanche, on n'obtient pas de résultat directement si l'on indique seulement que p est compris entre -1 et 1.

A screenshot of a TI-84 Plus calculator window titled '*Non enregistré'. The display shows the sum of a series: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \cdot x^n) | 0 < x < 1$ with the result $\frac{-x \cdot (x+1)}{(x-1)^3}$. Below this, there are two empty sum templates: $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n) | -1 < p < 1$ and $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n)$. The page number 16/99 is visible at the bottom right.

A screenshot of a TI-84 Plus calculator window titled '*Non enregistré'. The display shows the sum of a series: $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot p^n) | -1 < p < 0$. Below this, there is another sum: $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(n \cdot \pi) \cdot (-p)^n)$. The page number 17/99 is visible at the bottom right.

C'est également vrai, même pour une somme finie avec p fixé numériquement. Nous allons voir comment procéder dans ce cas dans la section suivante.

3.2 Séries géométriques de raison négative

Calculons la somme $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

Le calcul avec n fixé, est possible, mais le calcul avec n symbolique donne un résultat peu satisfaisant :

The screenshot shows two rows of calculations in the TI-Nspire CAS interface. The first row shows the sum of the series from $k=0$ to $k=10$, resulting in the fraction $\frac{683}{1024}$. The second row shows the same sum but with a symbolic n , resulting in the expression $\frac{\cos(n \cdot \pi) \cdot 2^{-n}}{3} + \frac{2}{3}$.

Lors de l'affichage de l'expression obtenue, la TI-Nspire CAS ne tient pas compte du fait que n désigne un entier. Pour obtenir un résultat plus simplifié, on peut remplacer n par $n1$. L'utilisation d'une variable du type $n1, n2, \dots$ est un moyen d'indiquer à la machine qu'elle travaille sur des entiers et elle n'a aucun problème pour trouver la somme de la série :

The screenshot shows two rows of calculations. The first row shows the sum from $k=0$ to $k=n$ with the result $\frac{\cos(n \cdot \pi) \cdot 2^{-n}}{3} + \frac{2}{3}$. The second row shows the sum from $k=0$ to $k=n1$, resulting in the simplified expression $\frac{(-1)^{n1} \cdot 2^{-n1}}{3} + \frac{2}{3}$.

The screenshot shows two rows of calculations. The first row shows the sum from $k=0$ to $k=n1$ with the result $\frac{(-1)^{n1} \cdot 2^{-n1}}{3} + \frac{2}{3}$. The second row shows the sum from $k=0$ to $k=\infty$, resulting in the simplified fraction $\frac{2}{3}$.

4. Suites et séries de fonctions

La fin de ce chapitre s'adresse aux étudiants connaissant les notions de convergence simple, uniforme et normale. Nous allons voir ici comment traiter un exercice de concours sur ce sujet en utilisant la TI-Nspire CAS.

4.1 Un exemple de convergence uniforme

On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

On demande d'étudier la convergence de (f_n) et de $\sum f_n$.

- Étude de la convergence simple

Elle ne pose aucun problème. Pour $x=0$, $f_n(x)=0$, $(f_n(0))$ converge vers 0. Pour x non nul, $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$, et il y a également convergence vers 0.

- Étude de la convergence uniforme

On commence par définir les fonctions et leurs dérivées :

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface with the following content:

$$f(n,x) := \frac{x}{n \cdot (n \cdot x^2 + 1)} \quad \text{Terminé}$$

$$df(n,x) := \frac{d}{dx}(f(n,x)) \quad \text{Terminé}$$

The bottom right corner of the screen shows '2/99'.

On peut ensuite rechercher les valeurs annulant $f'_n(x)$:

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface with the following content:

$$f(n,x) := \frac{x}{n \cdot (n \cdot x^2 + 1)}$$

$$df(n,x) := \frac{d}{dx}(f(n,x)) \quad \text{Terminé}$$

$$\text{solve}(df(n,x)=0,x)$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{n}} \text{ and } \frac{1}{n} \geq 0 \text{ or } x = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ and } \frac{1}{n} \geq 0$$

A warning icon and text at the bottom read: "Le domaine du résultat peut être plus grand que l...". The bottom right corner shows '2/99'.

Pour étudier les variations, il faut étudier le signe de la dérivée, et donc connaître l'expression de cette dernière :

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface with the following content:

$$df(n,x) = \frac{-\sqrt{n} \cdot x^2 - 1}{n \cdot (n \cdot x^2 + 1)^2}$$

$$\text{factor}(df(n,x),x) = \frac{-\{\sqrt{n} \cdot x - 1\} \cdot \{\sqrt{n} \cdot x + 1\}}{n \cdot (n \cdot x^2 + 1)^2}$$

The bottom right corner shows '5/99'.

Calculons également les valeurs de f_n en $\frac{-1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (on pourrait se contenter d'un calcul, f_n est impaire).

Il est également facile de vérifier la valeur des limites à l'infini :

Le domaine du résultat peut être plus grand que l...

On dispose de tous les éléments pour construire le tableau de variations.

x	$\frac{-1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	
$f'_n(x)$	+	-	-
$f_n(x)$	0	$-m$	m → 0

La norme infinie de f_n est donc égale à $m = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$, ce qui prouve la convergence uniforme de la suite (f_n) .

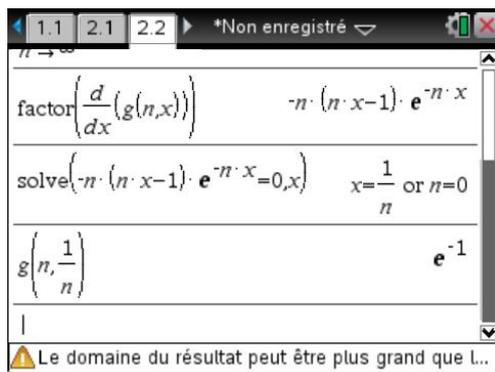
On peut également en déduire la convergence normale de $\sum f_n$ puisque $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$, avec

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergente : c'est une série de Riemann, et l'on a $n\sqrt{n} = n^\alpha$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

4.2 Un exemple de convergence non uniforme

Étudions à présent la suite de fonctions définie sur $I = [0, +\infty[$ par $g_n(x) = nx e^{-nx}$. Pour $x = 0$, la suite $(g_n(x))$ est constamment nulle. Pour $x > 0$, elle converge vers 0. Il y a donc convergence simple de cette suite vers 0. On peut le vérifier à condition toutefois de ne pas oublier la condition $x > 0$.

On peut ensuite facilement étudier les variations en calculant la dérivée :



L'étude des variations permet de montrer que les valeurs sont comprises entre 0 et $\frac{1}{e}$.

La norme infinie de la fonction est $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{e}$, et la suite de fonctions n'est pas uniformément convergente sur $I = [0, +\infty[$.

4.3 Illustration graphique

On peut visualiser la différence de comportement entre les deux suites étudiées. Nous allons directement construire les courbes représentatives de f_1, f_2, \dots, f_5 , puis de g_1, g_2, \dots, g_5 .

Il suffit pour cela de créer une nouvelle page avec l'application Graphiques & géométrie.

Une idée naturelle serait de définir cinq fonctions à construire :

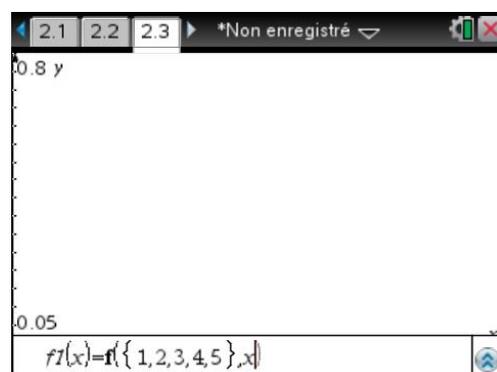
- $f_1(x)$ par $f(1, x)$
- $f_2(x)$ par $f(2, x)$
- $f_3(x)$ par $f(3, x)$
- $f_4(x)$ par $f(4, x)$
- $f_5(x)$ par $f(5, x)$

Mais il suffit en fait de définir

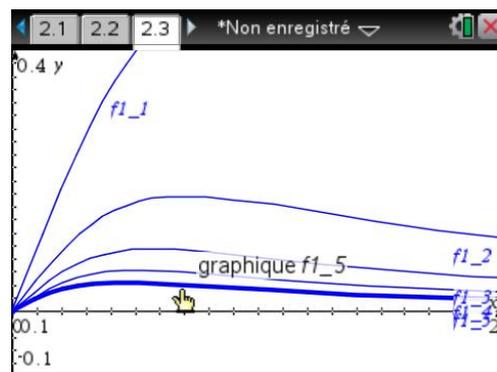
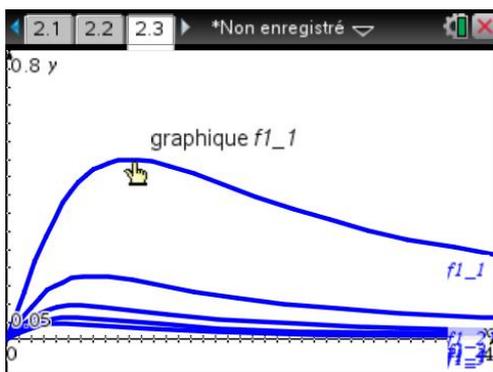
- $f_1(x)$ par $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}, x)$

pour construire automatiquement les cinq courbes représentatives correspondant aux cinq valeurs de n données dans la liste.

Les constructions sont faites sur l'intervalle $[0, 4]$:

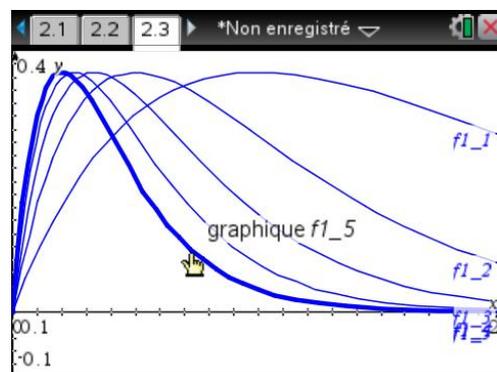
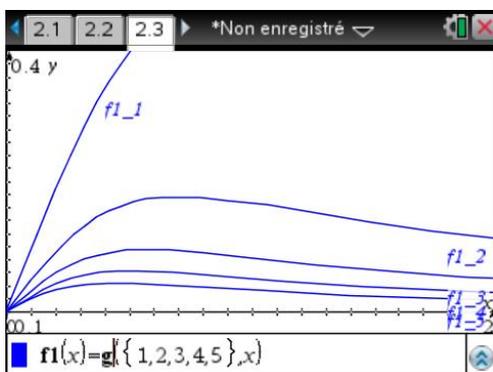


Voici ce que l'on obtient pour f_n :



☞ L'affichage indique le nom de la fonction, suivi du numéro d'ordre de la courbe dans la liste.

Puis pour g_n :



La différence de comportement est bien visible ici. Dans le premier cas, il y a convergence uniforme, alors que dans le second, on observe un phénomène typique de "bosse glissante".

Exercices

1 Point attractif, point répulsif

Dans le premier exemple de ce chapitre (suite récurrente, page 6), nous avons montré que la suite ne converge pas, sauf si elle est stationnaire.

Retrouver directement ce résultat, sans étudier les suites extraites.

2 Calcul des termes d'une suite récurrente double

Terme d'ordre n de la suite de Fibonacci : $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \geq 0 \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

3 Calcul de la somme d'une série

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!}$.

N.B. La TI-Nspire permet d'obtenir directement le résultat, mais on vous demande de conduire les calculs comme vous le feriez sans calculatrice dans un exercice de ce type.

4 Convergence d'une série

Déterminer les polynômes P à coefficients réels tels que la série de terme général $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ soit convergente.

5 Un exercice d'oral

Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

6 Convergence normale d'une série de fonctions

Étudier la convergence simple et la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} n x^\alpha e^{-n x^2}$ pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

Calculer la somme de cette série.

Solutions des exercices

1 Point attractif, point répulsif

Il est possible de prévoir la non-convergence de la suite en étudiant la nature du point fixe de f . On doit pour cela étudier la valeur absolue de la dérivée de la fonction pour ce point fixe. Le point est un point attractif si cette valeur absolue est inférieure à 1, et répulsif si elle est supérieure à 1.

1.1 *Non enregistré Terminé

$$f(x) = \frac{4-x^2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{solve}(f(x)=x, x) | 0 < x < 2 \quad x = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) | x = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{5}}{2} \quad 1 - \frac{\sqrt{105}}{5}$$

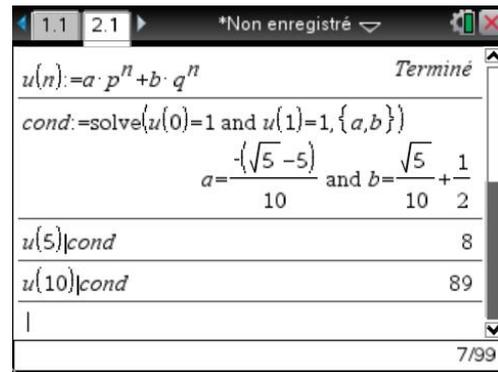
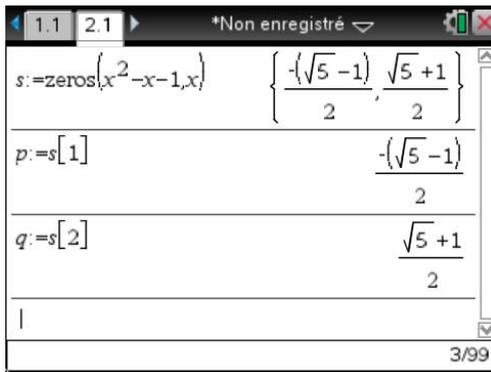
3/99

La valeur absolue de la dérivée est strictement supérieure à 1. L'unique point fixe est donc un point répulsif. La suite ne converge pas, sauf si elle est stationnaire.

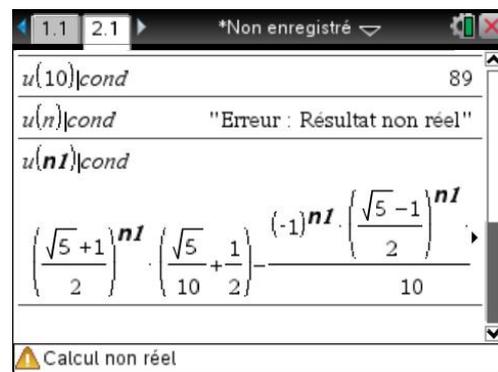
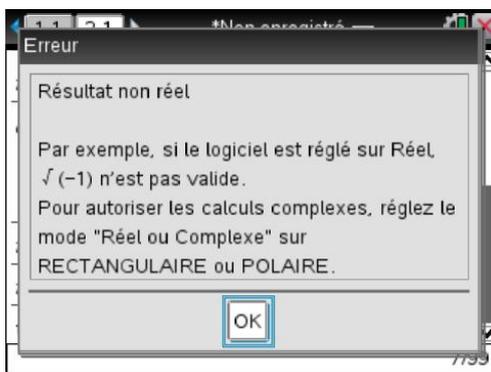
2 Calcul des termes d'une suite récurrente double

On sait que $u_n = a p^n + b q^n$, avec p et q solutions de $x^2 - x - 1 = 0$, et a et b déterminés par les conditions initiales $u_0 = a + b = 1$ et $u_1 = ap + bq = 1$. Il est possible de conduire tous les calculs nécessaires à la calculatrice.

```
s:=zeros(x^2-x-1,x)
p:=s[1]
q:=s[2]
u(n):=a*p^n+b*q^n
cond:=solve(u(0)=1 and u(1)=1,{a,b})
u(5)|cond...
```

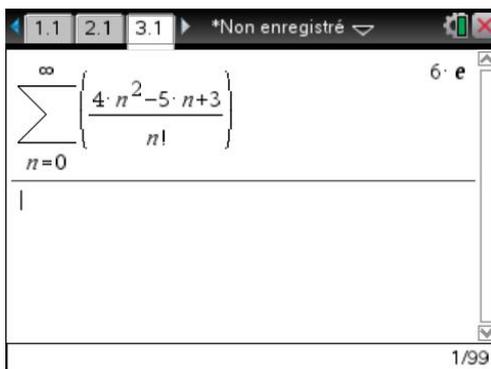


Nous avons calculé sans problème certaines valeurs de u_n . Attention par contre au calcul de u_n avec n quelconque. En mode réel, on retrouve les problèmes liés à l'évaluation de la puissance d'un nombre négatif, alors que la calculatrice ne sait pas que n est un entier.



3 Calcul de la somme d'une série

La TI-Nspire CAS sait calculer directement la somme de cette série.



Nous allons effectuer en utilisant l'aide de la TI-Nspire CAS les calculs tels qu'ils seraient fait à la main. Dans cet exercice, une idée assez classique est de rechercher a, b, c tel que :

$$4n^2 - 5n + 3 = a \cdot n(n-1) + b \cdot n + c$$

On écrit ensuite que :

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)}{n!} + b \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=2}^N \frac{n(n-1)}{n!} + b \sum_{n=1}^N \frac{n}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n-2)!} + b \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + b \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + c \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$$

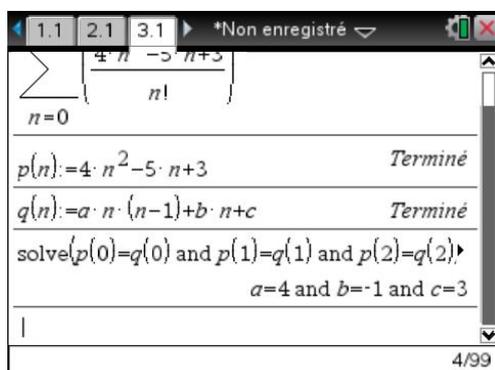
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2 - 5n + 3}{n!} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + c \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = (a + b + c) \cdot e$$

Il reste donc à déterminer a , b et c tels que le polynôme $p(n) = 4n^2 - 5n + 3$ soit égal au polynôme $q(n) = an(n-1) + bn + c$. Il y a plusieurs façons de le faire avec la TI-Nspire CAS. Ici, nous allons utiliser le fait qu'il doit y avoir égalité entre $p(n)$ et $q(n)$ pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

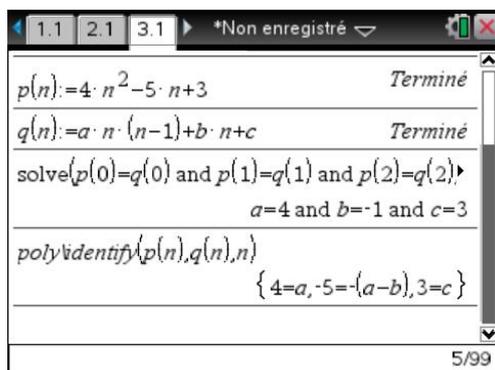
$$p(n) := 4n^2 - 5n + 3$$

$$q(n) := a \cdot n \cdot (n-1) + b \cdot n + c$$

$$\text{solve}(p(0)=q(0) \text{ and } p(1)=q(1) \text{ and } p(2)=q(2), \{a, b, c\})$$



On pouvait aussi utiliser la fonction **identify** de la bibliothèque **poly**.

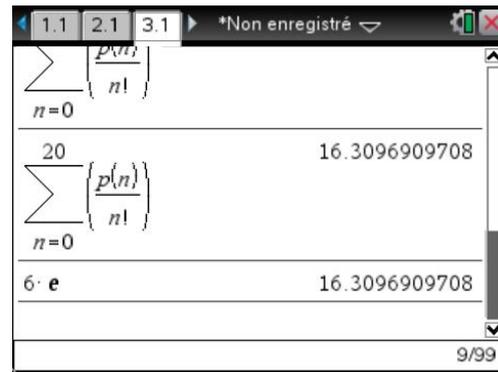
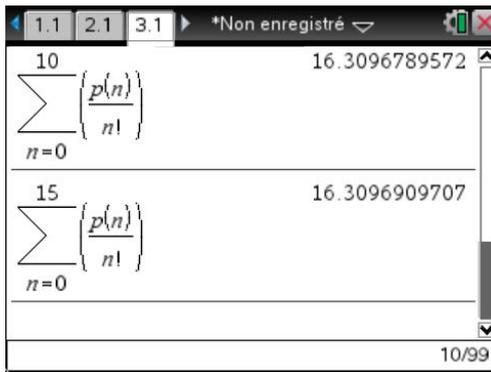


On doit donc avoir $a = 4$, $a - b = 5$ et $c = 3$.

D'où $a = 4$, $c = 3$, puis $b = a - 5 = 4 - 5 = -1$.

On obtient donc $S = (4 - 1 + 3) \cdot e = 6e$. Ce qui est bien le résultat trouvé directement.

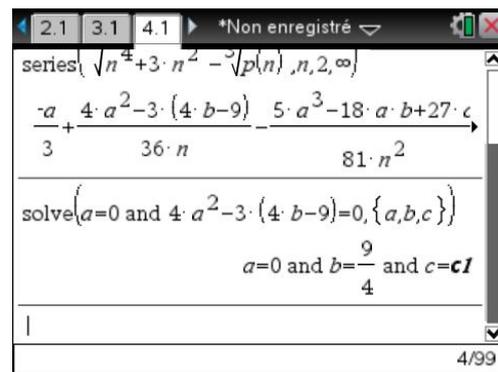
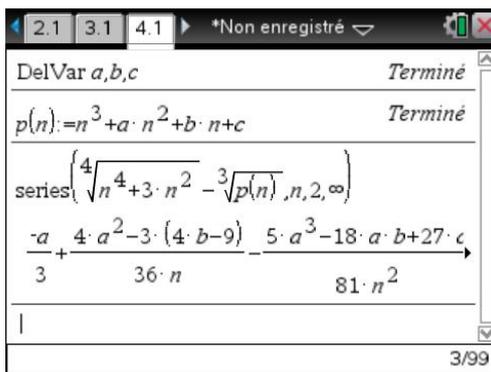
On peut le vérifier à l'aide de la TI-Nspire CAS en demandant le calcul approché (valider par **ctrl** **enter**) de ce nombre, et en le comparant par exemple au calcul approché de la somme des 20 premiers termes de la série. Comme on peut le voir, la convergence de cette série est très rapide.



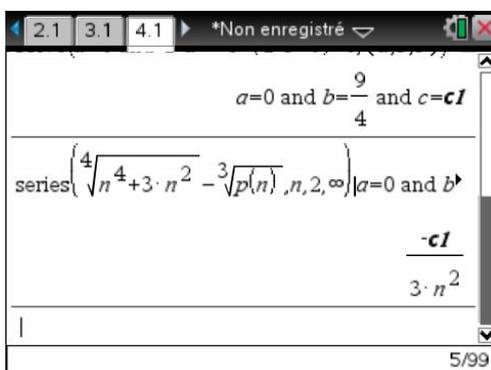
4 Convergence d'une série

Au voisinage de l'infini $\sqrt[4]{n^4 + 3n^2} \sim n$, une condition **nécessaire** pour que la série de terme général $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ converge est que u_n tende vers 0 à l'infini, ce qui impose $\sqrt[3]{P(n)} \sim n$ et donc que P soit de la forme : $P(n) = n^3 + a n^2 + b n + c$.

Pour déterminer les réels a , b et c , pour lesquels la série de terme général u_n converge, il suffit de faire un développement asymptotique de u_n .



Le terme constant, ainsi que le terme en $\frac{1}{n}$ doivent être nuls, ce qui donne les valeurs de a , b et c obtenues dans l'écran de droite ci-dessus (c est un réel quelconque). Ces conditions étant remplies, le calcul ci-dessous montre que $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc que la série converge.



On a donc $P(n) = n^3 + \frac{9}{4}n + c$, ($c \in \mathbb{R}$).

5 Un exercice d'oral

Comme on l'a vu au paragraphe 3, la TI-Nspire CAS calcule la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n$, à condition de lui préciser que $x \in]0,1[$. Le rayon de convergence de cette série est 1, comme on peut le voir en calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+4)^2}{(3n+1)^2} = 1$.

TI-Nspire CAS screen showing the sum of the series $\sum_{n=0}^{\infty} ((3 \cdot n + 1)^2 \cdot x^n)$ for $0 < x < 1$. The result is the rational function $\frac{-4x^2 + 13x + 1}{(x-1)^3}$.

TI-Nspire CAS screen showing the solving process for the equation $\text{getNum}\left(\frac{-4x^2 + 13x + 1}{(x-1)^3}\right) = 0$. The solutions are $x = \frac{-3\sqrt{17} + 13}{8}$ or $x = \frac{3\sqrt{17} - 13}{8}$.

La somme de la série et la fraction rationnelle trouvée dans l'écran de gauche ci-dessus coïncident sur $]0,1[$ et donc pour des raisons de continuité sur tout l'intervalle de convergence de la série $] -1,1[$. On est donc amené à résoudre l'équation $4x^2 + 13x + 1 = 0$, ce qui est fait dans l'écran de droite ci-dessus. On trouve deux racines dont seulement la seconde appartient à $] -1,1[$ (le résultat final de l'écran ci-dessous s'obtient en validant par **ctrl** **enter**).

TI-Nspire CAS screen showing the numerical solution for the equation $\text{getNum}\left(\frac{-4x^2 + 13x + 1}{(x-1)^3}\right) = 0$. The solutions are $x = -3.17116460961$ or $x = -0.078835390393$.

La solution est donc : $x = \frac{3\sqrt{17} - 13}{8}$

6 Convergence normale d'une série de fonctions

La convergence de la série ne pose pas de problème. Les termes sont tous strictement positifs, et on peut par exemple utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{n+1}{n} e^{-x^2} \rightarrow e^{-x^2} < 1.$$

Étudions à présent la convergence uniforme. On peut commencer par définir le terme général de la suite, puis s'intéresser au signe de sa dérivée.

TI-Nspire CAS interface showing the derivative of $u(n,x) = n \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}$. The result is $\frac{d}{dx}(u(n,x)) = \left(\frac{n \cdot \alpha}{x} - 2 \cdot n^2 \cdot x\right) \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}$. The status bar indicates "Terminé" and a warning: "Le domaine du résultat peut être plus grand que l..."

TI-Nspire CAS interface showing the zeros of the derivative. The result is $\text{zeros}\left(\left(\frac{n \cdot \alpha}{x} - 2 \cdot n^2 \cdot x\right) \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2}, x\right)$. The solutions are $\left\{\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2}, \frac{\alpha}{n} \geq 0\right\}$ and $\left\{-\frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2}, \frac{\alpha}{n} \geq 0, \{0, \alpha > 0\}\right\}$. The status bar shows "3/99" and the same warning.

Si $\alpha \leq 0$, il n'y a pas de solutions, u'_n est négative, et la fonction est décroissante. Pour n non nul, la limite de $u_n(x)$ en 0 est égale à $+\infty$. La calculatrice est en mesure de le confirmer, sous réserve qu'on pense à lui préciser que $n > 0$. Il ne peut donc pas y avoir de convergence normale (pas de majoration du terme général indépendante de x possible sur \mathbb{R}_+^*).

En revanche, sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, $a > 0$, on peut majorer la fonction par sa valeur en a , et il y a convergence normale puisque $\sum_{n \geq 1} n a^\alpha e^{-na^2}$ converge.

Si $\alpha > 0$, la dérivée s'annule en $x_n = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2n}}$. La fonction est croissante sur $]0, x_n]$, puis décroissante. On en déduit que $\forall x > 0, u_n(x) \leq u_n(x_n)$. $\|u_n\|_\infty = u_n(x_n)$.

Laissons à la calculatrice le soin de calculer cette valeur.

TI-Nspire CAS interface showing the expansion of the function at the maximum point. The result is $\text{expand}\left(u\left(n, \frac{\sqrt{2 \cdot \alpha}}{2 \cdot \sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n}}\right)^\alpha \cdot n}{\sqrt{e^\alpha} \cdot \sqrt{2^\alpha}}$. The status bar shows "4/99" and the same warning.

TI-Nspire CAS interface showing the expansion of the function at the maximum point. The result is $\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{n}}\right)^\alpha \cdot n}{\sqrt{e^\alpha} \cdot \sqrt{2^\alpha}}$. The status bar shows "4/99" and the same warning.

En conclusion, pour $\alpha > 0$, $\|u_n\|_\infty = u_n(x_n) = \frac{A}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, avec $A = \frac{(\sqrt{\alpha})^\alpha}{(\sqrt{e})^\alpha (\sqrt{2})^\alpha} = \left(\frac{\alpha}{2e}\right)^{\alpha/2}$.

Il y a donc convergence normale si et seulement si $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$, c'est à dire pour $\alpha > 4$.

La calculatrice permet d'obtenir directement la valeur de la somme de la série, sous réserve de préciser l'intervalle de définition de x .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u(n,x)) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot x^\alpha \cdot e^{-n \cdot x^2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u(n,x)) | x > 0 \quad \frac{x^\alpha}{4 \cdot \left(\sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2}$$

Pour comprendre ce dernier résultat, il suffit de voir que $n x^\alpha e^{-n x^2} = x^\alpha \cdot n p^n$, avec $p = e^{-x^2}$. On peut donc utiliser la formule de calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} n p^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot a^n) | 0 < a < 1 \quad \frac{a}{(a-1)^2}$$

$$\frac{a}{(a-1)^2} | a = e^{-x^2} \quad \frac{1}{4 \cdot \left(\sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2}$$

Pour parvenir au résultat affiché par la calculatrice, une petite transformation s'impose :

$$\frac{e^{-u}}{(e^{-u} - 1)^2} = \frac{e^{-u}}{\left(e^{\frac{u}{2}} \cdot \left(e^{-\frac{u}{2}} - e^{\frac{u}{2}} \right) \right)^2} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{u}{2}} - e^{\frac{u}{2}} \right)^2} = \frac{1}{\left(2 \sinh \frac{u}{2} \right)^2} = \frac{1}{4 \left(\sinh \frac{u}{2} \right)^2}$$

Ceci peut se retrouver en convertissant le dernier résultat en exponentielle.

$$\frac{1}{4 \cdot \left(\sinh\left(\frac{x^2}{2}\right) \right)^2} \quad \frac{1}{\left(e^{\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2}$$

