Les suites

1 Rappels de Première S

1.1 Suites arithmétiques (de raison r)

- $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_k + (n-k)r$
- $u_k + ... + u_p = \frac{1}{2}(p-k+1)(u_k + u_p)$. Autrement dit : la somme des termes de k à p d'une suit arithmétique égale $\frac{1}{2}$ fois le nombre de termes fois la somme des extrèmes.
- Une suit arithmétique est :
  - coissante si $r > 0$
  - décroissante si $r < 0$
  - constante si $r = 0$
- Pour montrer qu'une suite est arithmétique il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant.

1.2 Suites géométriques (de raison q)

- $u_{n+1} = u_n q$ et $u_n = u_k q^{n-k}$
- $u_k + ... + u_p = u_k \frac{1-q^{p-k+1}}{1-q}$. Autrement dit : la somme des termes de k à p d'une suit géométrique égale le premier terme fois $1 - q^{nombredetermes}$ sur $1 - q$
- Une suit géométrique est :
  - coissante si $q > 1$
  - décroissante si $q < 1$
- Pour montrer qu'une suite est géométrique il suffit de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

2 Récurrence

- Toute propriété vérifiée pour n_0 et héréditaire est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

3 Convergence d'une suite

- Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.
- Une suite converge lorsqu'il existe un réel l tel que : tout intervalle ouvert I de centre l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

4 Théorème des gendarmes

- Soit 3 suites (w_n), (u_n) et (v_n) tel que $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partie d'un certain rang N. Si (w_n) et (v_n) convergent vers l, alors (u_n) converge vers l.

5 Convergence d'une suite définie par récurrence

- Soit une suite (u_n) qui converge vers un réel l et qui est définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue en l. Alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

6 Suites adjacentes

Remarque : on prend (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une d'entre elles est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
- Pour tout n, $u_n \leq v_n$
- Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

7 Suites divergentes

- Une suite diverge quand elle ne converge pas, c'est-à-dire :
  - soit la suite n'a pas de limite
  - soit la limite est $\pm\infty$
- Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A;\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.
- Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ quand la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

8 Limites de suite

- Limites de suites arithmétique de raison r :
  - si $r > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  - si $r < 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Limites de suites géométriques de raison q :
  - si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
  - si $q \leq -1$: il n'y a pas de limite
  - si $q = 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
  - si $q > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

9 Divers : formules, remarques...

- Somme des n premiers entiers naturels : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $(1+x)^n \geq nx + 1$ pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier naturel n
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$
- Pour prouver qu'une suite converge on peut :
  - trouver le sens de variation et les bornes
  - ou appliquer le théorème des gendarmes