Continuité et limites

1 Continuité

1.1 Définitions

- Une fonction est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$
- Une fonction, définie sur un intervalle I, est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point $a \in I$.

1.2 Propriétés

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationelles sont continues sur les intervalles où elles sont définies
- La fonction racine est continue sur $[0; +\infty[$
- Les fonction cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$
- La somme et le produit de deux fonctions continues sont continus
- Si u et v sont continues, alors $\frac{u}{v}$ est continue sur son intervalle de définition
- La composée de deux fonctions continues est continue.

1.3 Théorème de la bijection

- Soit f une fonction définie et continue sur I. Soit $a \in I$, $b \in I$ et $a < b$.
  Si f est strictement croissante alors pour tout $k \in [f(a); f(b)]$, l'équation f(x)=k admet une solution unique.
  Même chose avec f strictement décroissante et $k \in [f(b); f(a)]$.

2 Limites

2.1 Opérations sur les limites

2.1.1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

2.1.2 Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	pas de résultat général

2.1.3 Limite d'un quotient

Si f a pour limite	l	$l>0$	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	0	$+\infty$	$l'>0$	0	$+\infty$	0
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}'$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	forme indeterminée	

2.2 Résoudre les formes indeterminées

- $+\infty - \infty$: factoriser le terme "dominant" (le terme de plus gaut degré pour un polynôme).
- $\frac{\infty}{\infty}$: factorisation des termes "dominants" puis simplification.
- $\frac{0}{0}$: factorisation d'un terme tendant vers 0, puis simplification.
- $0 \times \infty$: peut en général se ramener à l'un des deux cas précédents.
- En cas de présence de racine carrée, on peut faire la méthode de la quantité conjuguée.

2.3 Limites de fonctions polynômes et rationelles

- La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationelle est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré.

2.4 Limites de fonctions composées

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$,
  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} gof(x) = c$$

2.5 Théorème des gendarmes

- Si pour tout $x \in [A; +\infty[$ on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
  si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$,
  si $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$,
  alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

2.6 Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors la courbe Cf admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ alors Cf admet une asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$.
  La position de Δ par rapport à Cf est déterminée pas le signe de $h(x)$.