Physique des Ondes

1. Ondes unidimensionnelles

✓ *Equation de d'Alembert*

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Equilibre :

$$\overrightarrow{T_d}(x,t) = -\overrightarrow{T_g}(x,t) = \vec{T}(x,t)$$

BDF :

$$\overrightarrow{T_d}(x+dx,t) = \vec{T}(x+dx,t)$$
$$\overrightarrow{T_g}(x,t) = -\vec{T}(x,t)$$

PFD :

$$\vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t) = m \cdot \vec{a} = \mu \cdot dx \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \cdot \overrightarrow{U_y}$$
$$\frac{\delta \vec{T}}{\delta x} = \mu \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \cdot \overrightarrow{U_y}$$

On note $\vec{T}(x,t) = T(x,t) \cdot \vec{u}(x,t)$ $\quad$ $\vec{u}$ *vecteur unitaire tangent à la corde*

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\delta}{\delta x}(T(x,t) \cdot \cos\alpha(x,t)) \\ \mu \cdot \dfrac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \dfrac{\delta}{\delta x}(T(x,t) \cdot \sin\alpha(x,t)) \end{cases}$$

On effectue le DL $\sin\alpha = \alpha \; ; \; \cos\alpha = 1$

$$\mu \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = T \cdot \frac{\delta \alpha}{\delta x}$$

Or $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha \; ; \; DL\ \tan\alpha = \alpha$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\mu}{T} \cdot \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

- ➢ *Onde progressive harmonique*

- ✓ *Explicitation*

$$y(x,t) = y_0 \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} = j\omega$$

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} = -jk$$

- ✓ *Equation de dispersion*

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- ✓ *Vitesse de phase / de groupe*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- ➢ *Onde stationnaire*

$$y(x,t) = a \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \frac{\sin\big(k(l-x)\big)}{\sin(kl)}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$k = \frac{n\,\pi}{l} \qquad\qquad \omega = \frac{\pi\,c}{l}$$

2. Câble coaxial

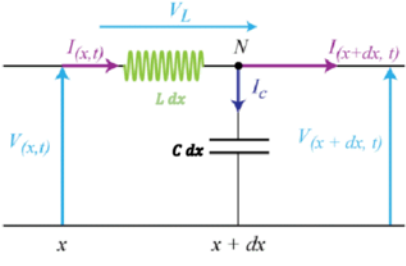
- ✓ *Modèle*

$$\begin{cases} -\frac{\delta u}{\delta x} = L \cdot \frac{\delta i}{\delta t} \\ -\frac{\delta i}{\delta x} = C \cdot \frac{\delta u}{\delta t} \end{cases}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}$$

$$\frac{\delta^2 i}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta^2 i}{\delta t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}$$



- *Equation de dispersion*

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

- *Vitesse de phase*

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

- *Impédance caractéristique*

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- *Résistance terminale*

R mise aux extrémités

$$u(0,t) = R \cdot i(0,t) = 0$$

- *Coefficient de réflexion*

$$r_u = \frac{U_0^-}{U_0^+} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c} \qquad (tension)$$

$$r_i = -r_u \qquad (courant)$$

3. Ondes sonores

- *Les champs dans le fluide*

$$P(M,t) = P_0 + P_1(M,t) \qquad |P_1| \ll P_0$$

$$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t) \qquad |\mu_1| \ll \mu_0$$

$$\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v_1}(M,t) \qquad |v_1| \ll c$$

- *PFD*

$$\mu_0 \cdot \frac{\delta \vec{v_1}}{\delta t} = -\overrightarrow{grad}\,(P_1)$$

- *Conservation de la masse*

$$\frac{\delta \mu_1}{\delta t} = -\mu_0 \cdot div\,(\vec{v_1})$$

- *Evolution isentropique*

$$\text{Mise en mouvement par l'onde} \Rightarrow \text{adiabatique réversible } (= \text{isentropique})$$

- *Coefficient thermodynamique (isentropique)*

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\delta \mu}{\delta P}$$

- *Equation thermodynamique*

$$\mu_1 = \chi_s \cdot \mu_0 \cdot P_1$$

- *Equation de propagation*

$$\Delta P_1 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\delta^2 P_1}{\delta t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \chi_S}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \mu_1}{\delta t} = -\mu_0 \cdot div\,(\overrightarrow{v_1}) \\ \mu_1 = \chi_s \cdot \mu_0 \cdot P_1 \end{cases}$$

$$\chi_s \cdot \frac{\delta P_1}{\delta t} = -div\,(\overrightarrow{v_1})$$

$$\begin{cases} \mu_0 \cdot \dfrac{\delta v_1}{\delta t} = -\dfrac{\delta P_1}{\delta x} \\ \chi_s \cdot \dfrac{\delta P_1}{\delta t} = -\dfrac{\delta v_1}{\delta x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_0 \cdot \dfrac{\delta^2 v_1}{\delta x\, \delta t} = -\dfrac{\delta^2 P_1}{\delta x^2} \\ \chi_s \cdot \dfrac{\delta^2 P_1}{\delta x\, \delta t} = -\dfrac{\delta^2 v_1}{\delta x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\delta^2 P_1}{\delta x^2} = \mu_0 \cdot \chi_s \cdot \frac{\delta^2 P_1}{\delta t^2}$$

Preuve unidimensionnelle généralisée pour 3 dimensions

- *Célérité*

$$c = \sqrt{\frac{\gamma\, R\, T}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\mu}}$$

✓ *Nombre de Mach*

$$M_a = \frac{U}{c}$$

$$U = vitesse\ débitante = \frac{D_v}{S}$$

✓ *Densité de courant énergétique (Poynting)*

$$\delta^2 E = \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} \cdot dt$$

$$\vec{\Pi} = P_1 \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$[\Pi] = W.m^{-2}$$

✓ *Energie volumique sonore*

$$e_c = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot v_1^2$$

$$e_c = \frac{1}{2} \cdot \chi_s \cdot P_1^2$$

✓ *Intensité acoustique / sonore*

$$I = < \Pi >$$

$$I_{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$I_0 = 10^{-12}\ W.m^{-2}$$

4. Ondes électromagnétiques

➢ *Dans le Vide*

✓ *Densité d'énergie électromagnétique*

$$w_{em} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2} + \frac{B^2}{2\ \mu_0}$$

✓ *Vecteur de Poynting*

$$\overrightarrow{\Pi_{em}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

✓ *Conservation d'énergie*

$$\frac{\delta w_{em}}{\delta t} = -div\ \overrightarrow{\Pi_{em}} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

✓ *Equation de propagation*

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\delta E^2}{\delta t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\delta B^2}{\delta t^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\cdot\varepsilon_0}}$$

✓ *Equations de Maxwell*

$$MG\ :\ -j\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

$$MT\ :\ -j\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$

$$MF\ :\ -j\vec{k}\wedge\vec{E} = -j\omega\,\vec{B}$$

$$MA\ :\ -j\vec{k}\wedge\vec{B} = j\omega\,\mu_0\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{k\wedge\vec{E}}{\omega}$$

✓ *Expression des champs*

$$\vec{E} = E_0\cdot\cos(\omega t - kx)\cdot\overrightarrow{U_y}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cdot\cos(\omega t - kx)\cdot\overrightarrow{U_z}$$

$$w_{elec} = w_{mag}$$

➢ *Dans un Conducteur*

✓ *Loi d'Ohm locale*

$$\vec{j} = \gamma\cdot\vec{E}$$

✓ *Force électromagnétique*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Dans un conducteur q = -e

✓ *Equation de propagation*

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\cdot\gamma\cdot\frac{\delta\vec{E}}{\delta t}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

5. Optique

- ✓ *Loi de Descartes*

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$$

- ✓ *Condition pour réflexion totale*

$$\frac{n_1 \cdot \sin i_1}{n_2} > 1$$

- ✓ *Vergence d'une lentille*

$$c = \frac{1}{f'} \qquad en\ \delta\ (dioptries)$$

- ✓ *Formules de Descartes*

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- ✓ *Formules de Newton*

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$